CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

18/1/2006

Esercizio 1. Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_f = \frac{2x^2}{(1+x^2)\log(1+x^2)} - 1.$$

In un intorno dello 0 della forma $|x| \le a$, con $a < 2$ è $0 < c_f < 1$. Quindi il problema è ben condizionato. Per l'errore algoritmico si ha

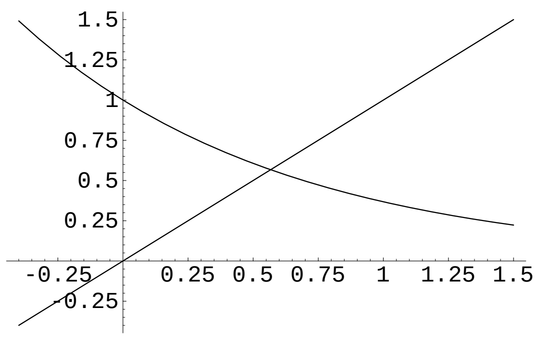
$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(3)} + \frac{1}{\log(1+x^2)} \left(\epsilon^{(3)} + \frac{x^2}{1+x^2}\,\epsilon^{(1)}\right),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono rispettivamente gli errori locali del quadrato, dell'addizione, del logaritmo e della divisione. Poiché $|\epsilon_{alg}|$ non è limitabile vicino a 0, l'algoritmo non risulta stabile.

Esercizio 2. a) È

$$f(x) = (x - \mathrm{e}^{-x})^2,$$

per cui $g(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$. Dal grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = \mathrm{e}^{-x}$



risulta che l'equazione $g(x) = 0$ ha una sola radice reale $\alpha \in [0, 1]$. Quindi anche l'equazione $f(x) = 0$ ha la sola soluzione α. Le due equazioni non sono equivalenti perché α ha molteplicità 1 per l'equazione $g(x) = 0$ e 2 per l'equazione $f(x) = 0$.

b) È $f(x) > 0$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq \alpha$. Quindi il metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$ converge ad α in modo monotono per ogni $x_0 \neq \alpha$. L'ordine di convergenza è 1 perché $f'(\alpha) = 0$.

c) È $g(x) < 0$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x < \alpha$. Quindi il metodo delle tangenti applicato all'equazione $g(x) = 0$ converge ad α in modo monotono per ogni $x_0 < \alpha$. Se si sceglie $x_0 > \alpha$ risulta $x_1 < \alpha$ e la monotonia della successione si instaura dopo la prima iterazione. L'ordine di convergenza è 2 perché $g'(\alpha) \neq 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$.

Esercizio 3. a) Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due vettori di componenti tutte uguali a 1 si ha

$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \|\boldsymbol{v}\|_\infty = 1, \quad |\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}| = n, \quad \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\|_\infty = n.$$

b) È

$$\|\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |u_i v_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} |u_i| \max_{i=1,\dots,n} |v_i| = \|\boldsymbol{u}\|_\infty \, \|\boldsymbol{v}\|_\infty.$$

Esercizio 4. a) A non ha predominanza diagonale per righe.

b) È

$$T = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 0.75 & 2 & 0.75 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Quindi T ha predominanza diagonale per righe.

c) Ne segue che il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice T è convergente.

d) Indicate con D e con $-(B+C)$ la parte principale e la parte non principale di A, si ha

$$A = D - (B + C), \quad J_A = D^{-1}(B + C), \quad T = SDS^{-1} - S(B + C)S^{-1}.$$

Poiché S e D sono matrici diagonali, SDS^{-1} e $S(B + C)S^{-1}$ rappresentano rispettivamente la parte principale e la parte non principale di T, quindi

$$J_T = \left(SDS^{-1}\right)^{-1} S(B + C)S^{-1} = SD^{-1}(B + C)S^{-1} = SJ_AS^{-1}.$$

e) Le due matrici J_A e J_T hanno gli stessi autovalori, quindi i due metodi iterativi hanno le stesse proprietà di convergenza.