Soluzione della prima prova parziale
di Calcolo Numerico
7 Novembre 2006

Compito A

Esercizio 1

(a) Per prima cosa conviene rappresentare x in forma normalizzata. Si ottiene $x = 0.2006 \cdot 10^4$. La rappresentazione di x in $\mathcal{F}$ ottenuta per troncamento è allora $\widetilde{x} = \mathrm{trn}(x) = 0.200 \cdot 10^4 = 2000$.

(b) L'intervallo richiesto comprende tutti i reali tra $\widetilde{x}$ e l'elemento di $\mathcal{F}$ ad esso successivo (quest'ultimo escluso), ossia $[2000, 2010)$.

(c) La precisione di macchina è $u = 10^{1-3} = 10^{-2}$. Ovviamente se si sceglie $z = \widetilde{x} = 2000$ l'errore relativo è limitato dalla precisione di macchina in base al teorema sull'errore di rappresentazione. Per avere un altro $z \in \mathcal{F}$ che soddisfi alla limitazione richiesta si intuisce che occorre restare nelle vicinanze di $\widetilde{x}$. Infatti, si verifica direttamente che, per esempio, $z = 2010$ soddisfa alla limitazione.

Esercizio 2

(a) Occorre innanzitutto calcolare il coefficiente di amplificazione della funzione che risulta

$$C_x = x\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x\cos x}{(5+\sin x)(6+\sin x)}.$$

Poiché C_x è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 2\pi]$, è necessariamente limitatata. Quindi il calcolo di $f(x)$ è un problema ben condizionato. Per ottenere una limitazione superiore per $|C_x|$ si osserva che in $[0, 2\pi]$ risulta $|x\cos x| \le 2\pi$, $|5+\sin x| \ge 4$ e $|6+\sin x| \ge 5$. Dunque

$$|C_x| \le \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}.$$

(b) Per l'errore algoritmico si ottiene l'espressione

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \eta_4 + \frac{1}{6+\sin x}\left(\eta_3 - \eta_2 + \frac{\sin x}{5+\sin x}\,\eta_1\right),$$

dove η_1, η_2, η_3 η_4 sono gli errori locali del calcolo di $\sin x$, della prima addizione, del reciproco e dell'addizione finale. Indicando con u la precisione di macchina dell'aritmetica utilizzata, si ha

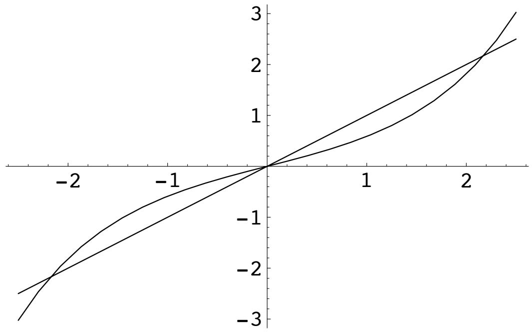
$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \le u\left(1 + \frac{2|5+\sin x| + |\sin x|}{|5+\sin x|\,|6+\sin x|}\right) = u\left(1 + \frac{10 + 2\sin x + |\sin x|}{(5+\sin x)\,(6+\sin x)}\right).$$

L'errore algoritmico è limitato e dunque l'algoritmo è stabile. Ragionando come nel punto precedente si ottiene facilmente la limitazione superiore

$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \le u\left(1 + \frac{13}{20}\right) < 2\,u.$$

Esercizio 3

(a) Disegniamo i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$. Notiamo che $g(x)$ è definita su tutto l'asse reale e che risulta $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Inoltre $g'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{4} > 0$, dunque $g(x)$ è sempre crescente. Poiché $g(0) = 0$, la $g(x)$ risulta negativa per x negativo e positiva per x positivo. Risulta inoltre $g''(x) = g(x)$ e dunque la concavità della $g(x)$ è volta verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x > 0$ (l'origine risulta essere un punto di flesso). Siccome $g'(0) = 1/2$, si deduce che vi sono tre punti di intersezione con la bisettrice $-3 < \alpha < -2$, $\beta = 0$ e $2 < \gamma < 3$.



L'analisi precedente può essere leggermente semplificata notando che $g(x)$ è una funzione dispari, ossia simmetrica rispetto all'origine degli assi. Questo implica, tra l'altro, $\alpha = -\gamma$.

(b) Il disegno suggerisce che il metodo genera una successione convergente a $\beta = 0$ per ogni $\alpha < x_0 < \gamma$ e genera una successione divergente se $x_0 < \alpha$ o $x_0 > \gamma$. Avendosi $g'(0) = 1/2$, l'ordine di convergenza a $\beta = 0$ è 1.