CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

9/6/2005

Esercizio 1. a) Per il condizionamento di $f(x)$ si studia l'errore inerente

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{x+1}.$$

Pertanto il calcolo di $f(x)$ risulta malcondizionato nell'intorno di -1.
b) Per la stabilità si studiano gli errori algoritmici. Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(1)} - \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(4)} - \frac{x^2}{x^2-1}\epsilon^{(2)},$$

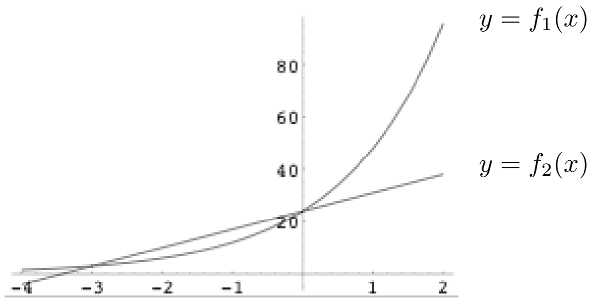
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono rispettivamente gli errori locali del calcolo della sottrazione in $x-1$, del quadrato, della sottrazione in x^2-1 e della divisione. Pertanto $\left|\epsilon_{alg}^{(1)}\right|$ non risulta limitato negli intorni di 1 e -1.

Per il secondo algoritmo si ha

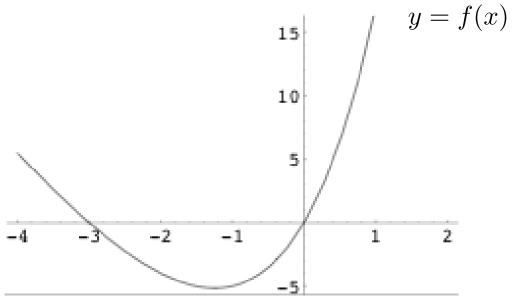
$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \eta^{(2)} - \eta^{(1)},$$

dove $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ sono rispettivamente gli errori locali del calcolo della addizione e della divisione. Pertanto $\left|\epsilon_{alg}^{(2)}\right|$ risulta sempre limitato.

Esercizio 2. a) Posto $f_1(x) = 3 \cdot 2^{x+3}$ e $f_2(x) = 7x + 24 = 0$, l'equazione $f(x) = 0$ è equivalente all'equazione $f_1(x) = f_2(x)$. Dal grafico



risulta che l'equazione ha le due soluzioni reali $\alpha = -3$ e $\beta = 0$. Il grafico di $f(x)$ risulta



b) Vi è un solo punto di minimo di ascissa $x_{\min} = -3 + \log_2 \Big(7/(3 \log 2)\Big) \sim -1.25$. La derivata seconda è sempre positiva. Il metodo delle tangenti risulta convergente con ordine di convergenza 2 alla soluzione α se $x_0 < x_{\min}$ e alla soluzione β se $x_0 > x_{\min}$. La convergenza è monotona fin dalla prima iterata se $x_0 < \alpha$ o $x_0 > \beta$.

Esercizio 3. La matrice A ha predominanza diagonale in senso stretto, quindi il metodo di Jacobi è convergente. La matrice di iterazione del secondo metodo è

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/32 & 0 \\ 1/2 & 1/16 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

e ha raggio spettrale $\rho_2 = 5/16$. La matrice di iterazione del metodo di Jacobi ha raggio spettrale $\rho_1 = \sqrt{5}/4$. Poiché $\rho_2 < \rho_1$ il secondo metodo è preferibile. Nella pratica il secondo metodo viene applicato partendo dall'ultima equazione e risalendo fino alla prima, nel modo seguente

$$\begin{cases} x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\Big(b_3 + \frac{1}{2}x_2^{(k)}\Big) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\Big(b_2 + x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k+1)}\Big) \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\Big(b_1 + x_2^{(k+1)}\Big) \end{cases}$$

Esercizio 4. a) L'errore assoluto della formula dei trapezi è

$$R = -\,\frac{(b-a)^3}{12N^2}\, f''(\xi), \quad \xi \in (a,b),$$

quindi l'errore relativo è

$$\epsilon = -\,\frac{R}{\int_a^b f(x)\,dx} = -\,(\log 2)^3 \frac{1}{12N^2}\, 2^{\xi} \quad \text{e} \quad \big|\epsilon\big| < \frac{(\log 2)^3}{6N^2} \sim \frac{0.056}{N^2}$$

Si impone che $0.056/N^2 < 10^{-6}$, da cui si ricava che basta scegliere $N = 237$.
b) Scegliendo $N = 100$ i nodi della formula risultano $z_k = k/100$, per $k = 0, \ldots, 100$ e si ha

$$S_N = \frac{1}{200}\Big[1 + 2\sum_{k=1}^{99} (2^{1/100})^k + 2\Big].$$

La sommatoria viene calcolata usando la formula della somma di una progressione geometrica, quindi

$$S_N = \frac{1}{200}\left[3 + 2\left(\frac{1-(2^{1/100})^{(99+1)}}{1-2^{1/100}} - 1\right)\right] = \frac{1}{100}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[100]{2}-1}\right].$$

c) Poiché $f''(x) > 0$ è $R = \int_a^b f(x)\,dx - S_N < 0$, quindi S_N è maggiore del valore esatto dell'integrale.