CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

7/2/2005

Esercizio 1. Per studiare il condizionamento di $f(x)$ si studia l'errore inerente

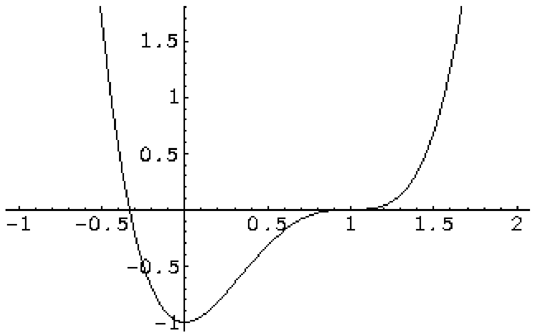
$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-x^2})} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Pertanto il calcolo di $f(x)$ risulta malcondizionato nell'intorno sinistro di 1. Per la stabilità si studia l'errore algoritmico, servendosi di un grafo. Si ha

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(5)} + \frac{\epsilon^{(4)}}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{2x^2}\left(\epsilon^{(3)} + \frac{1}{2}\,\epsilon^{(2)}\right) + \frac{x^2\,\epsilon^{(1)}}{4(\sqrt{1-x^2}-1+x^2)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono rispettivamente gli errori locali del calcolo del quadrato, della sottrazione in $1-x^2$, della radice quadrata interna, della sottrazione in $1-\sqrt{}$ e della radice quadrata esterna. Pertanto $|\epsilon_{alg}|$ non risulta limitato nell'intorno destro di 0 e nell'intorno sinistro di 1.

Esercizio 2. a) Poiché $f(x) = 3(x+1/3)(x-1)^3$, l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni: la soluzione $\alpha = -1/3 \in [-1, 0]$ di molteplicità 1 e la soluzione $\beta = 1 \in [0, 2]$ di molteplicità 3. Il grafico della $f(x)$ è il seguente



b) Per ogni $x \in (1/3, 1)$ è $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, $f(x)f''(x) > 0$. Quindi se si sceglie $x_0 \in (1/3, 1)$ il metodo delle tangenti converge a β con una successione crescente. Per ogni $x > 1$ è $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, $f(x)f''(x) > 0$. Quindi se si sceglie $x_0 > 1$ il metodo delle tangenti converge a β con una successione decrescente. Per $x_0 \in (0, 1/3]$ si ha $x_1 > 1/3$, per cui il metodo comunque converge a β. In ogni caso, poiché β ha molteplicità maggiore di 1, l'ordine di convergenza è 1. Per $x_0 < 0$ il metodo converge ad α con ordine 2.

c*) Il metodo delle tangenti applicato alla f dà

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{9x^2+2x+1}{12x},$$

quindi si ha

$$\frac{x_{i+1}-\beta}{x_i-\beta} = \frac{9x_i^2-10x_i+1}{12x_i(x_i-1)} = \frac{(9x_i-1)(x_i-1)}{12x_i(x_i-1)} = \frac{9x_i-1}{12x_i},$$

e

$$\lim_{x_i\to\beta}\frac{x_{i+1}-\beta}{x_i-\beta}=\lim_{x_i\to 1}\frac{9x_i-1}{12x_i}=\frac{8}{12}.$$

Questo conferma che il metodo ha ordine di convergenza 1.

Esercizio 3. a) Il sistema risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}$$

La soluzione $\mathbf{x}$ ha componenti $x_k=2$ per k dispari e $x_k=0$ per k pari.
b) È $\|A\|_\infty=2$. La matrice A^{-1} è triangolare inferiore con gli elementi costanti sulla diagonale e sulle parallele alla diagonale, alternativamente uguali a 1 e a -1. Per esempio, per $n=5$ si ha

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\|A^{-1}\|_\infty=n$ e il numero di condizionamento di A risulta $\mu_\infty(A)=2n$. Perciò il condizionamento di A cresce in modo lineare con n e la matrice risulta malcondizionata per n grande.

Esercizio 4. È

$$f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

e

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=|f''(0)|=2.$$

Perciò il resto della formula dei trapezi risulta maggiorato in modulo da

$$\left|R_2^{(N)}\right|\le\frac{(b-a)^3}{12N^2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\frac{1}{6N^2}.$$

Basta scegliere $N=41$ perché tale maggiorazione risulti minore di 10^{-4}.