
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

13/01/2005

Esercizio 1 È noto che nell'algebra dei numeri reali vale la proprietà di semplificazione, cioè $x(y/x) = y$. Si verifichi che questa proprietà non vale nell'algebra dei numeri di macchina, constatando che per i numeri $x = 1/9$ e $y = 1/5$ è

$$\tilde{x} \otimes (\tilde{y} \oslash \tilde{x}) \neq \tilde{y},$$

quando si operi in $\mathcal{F}_{(2,3,3,3)}$ con troncamento.

Esercizio 2 È data l'equazione $f(x) = x^2 - \log(x+2) = 0$.

- Con opportuna separazione grafica, si dica quante soluzioni reali ha l'equazione.
- L'equazione $x = g(x)$, dove $g(x) = \sqrt{\log(x+2)}$ è equivalente all'equazione $f(x) = 0$?
- Si consideri il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, e se ne studi la convergenza, indicando anche come scegliere il punto iniziale e qual è l'ordine di convergenza.

Esercizio 3 È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Mediante i cerchi di Gerschgorin si dia una limitazione inferiore e superiore degli autovalori di A .
- Si calcolino gli autovalori della matrice $B = A - 3/4I$, dove I è la matrice identica di ordine 3.
- Si dica quali sono gli autovalori di A e di A^{-1} .

Esercizio 4 a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/k^2$, $x_2 = 1$, dove k è un intero maggiore di 1.

- Posto $r(x) = f(x) - p(x)$, si disegni un grafico approssimativo di $|r(x)|$ per $x \in (0, 1]$ nel caso $k = 3$.
- c*) Calcolando il $\lim_{k \rightarrow \infty} |r(1/2)|$ si verifichi che $|r(x)|$ non è superiormente limitato per $x \in [0, 1]$ al crescere di k . Tenendo conto del teorema del resto, si dia una spiegazione di questo fatto.