Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
25 Maggio 2004

Esercizio 1

(a) Come noto $\omega = \beta^{-m-1}$ e $\Omega = \beta^M(1-\beta^{-t})$.

(b) Risulta $b = 1/\omega = \beta^{m+1}$. Avendosi per ipotesi $m = M$ risulta $b > \Omega$. Dunque $b \notin \mathcal{F}$. Inoltre $B = 1/\Omega = \beta^{-M}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{-tk}$. Trattandosi di un numero periodico $B \notin \mathcal{F}$.

(c) Risulta $\omega = 2^{-7}$, $\Omega = 2^6(1-2^{-8})$, $b = 2^7$, $B = 2^{-6}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-8k}$.

Esercizio 2

La funzione di iterazione risulta $\varphi(x) = kx(x-1)$ e avendosi $\varphi'(x) = 2kx-k$ risulta $\varphi'(0) = -k$. Dunque se $|k| < 1$ la convergenza locale è garantita. L'ordine di convergenza è 1 tranne che per $k = 0$ caso in cui $\varphi(x) = 0$ e si ha convergenza in un passo.

Esercizio 3

(a) La matrice A ha rango 2, infatti le ultime due colonne sono uguali alle prime due che sono ovviamente linearmente indipendenti.

(b) Gli autovalori sono 0 e 2. Si possono calcolare utilizzando il polinomio caratteristico che risulta $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)^2$, o direttamente dalla definizione.

(c) No. Se $\mathbf{x}$ esistesse, A avrebbe rango 1.

(d) Il metodo converge poichè la matrice di iterazione è $\frac{1}{4}A$ e risulta

$$\rho(\frac{1}{4}A) = \frac{1}{4}\rho(A) = 2.$$

La successione risulta quindi convergente a $\mathbf{x}^* = 4(A+4I)^{-1}b$.

Esercizio 4

Posto $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ risulta in $[0, \pi/2]$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos x},$$

ove per $x = 0$ si usa il teorema del limite della derivata. Procedendo in modo analogo si trova

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - \cos x}.$$

Dunque $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}$ in $[0, \pi/2]$. Il valore assoluto del resto della formula dei trapezi può essere maggiorato come segue

$$|R^{(n)}| \leq \frac{1}{4} \frac{(\pi/2)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{384n^2}.$$

Perchè l'errore assoluto sia inferiore a 10^{-2} basta allora che $n^2 > \frac{100\pi^3}{384} > 8$. Dunque si deve avere $n^2 \geq 9$ ossia $n \geq 3$.