Esercizio 1. Sia u la precisione di macchina. Dal grafo relativo alla funzione $f = (1+x^2)(1-x)$ si ha che

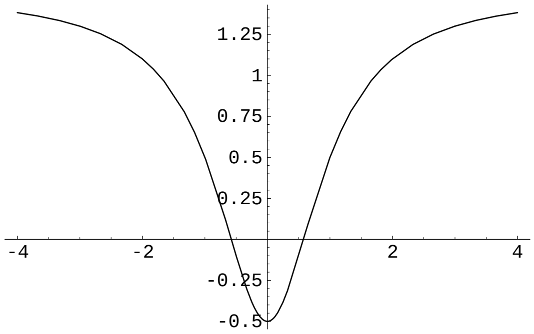
$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\Big(3 + \frac{x^2}{1+x^2}\Big) < 4u.$$

Dal grafo relativo alla funzione $f = 1 - x + x^2 - x^3$ si ha che

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\Big(2 + \frac{|1-x+x^2| + |x^3|}{|1-x+x^2-x^3|}\Big).$$

Quindi il primo algoritmo è stabile per ogni x, mentre il secondo non è stabile per x in un intorno $\mathcal{I}$ di 1 di raggio piccolo. Poiché per x al di fuori di $\mathcal{I}$ i due algoritmi sono ugualmente stabili, il primo algoritmo è preferibile.

Esercizio 2. Grafico della funzione $f = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}$



L'equazione ha due radici reali $\alpha = 1/\sqrt{3} \in [0.5, 1]$ e $\beta = -1/\sqrt{3} \in [-1, -0.5]$. Si verifica che anche $f''(x)$ si annulla in α e β. Poiché né $f'(x)$ né $f'''(x)$ si annullano in α e β, il metodo delle tangenti converge ad α o a β con ordine 3, purché x_0 sia scelto sufficientemente vicino alla radice che si vuole approssimare. Per nessun x reale è verificata la condizione $f(x)f''(x) > 0$, quindi nessuna successione potrà convergere in modo monotono. Un opportuno intervallo in cui scegliere x_0 per avere convergenza ad α può essere determinato attraverso la condizione del teorema del punto fisso. Infatti si ha

$$g(x) = \frac{1+6x^2-3x^4}{8x}, \quad g'(x) = -\frac{(3x^2-1)^2}{8x^2}.$$

La condizione $|g'(x)| < 1$ è verificata per gli x per cui $(3x^2-1)^2 < 8x^2$, cioè negli intervalli

$$(-\gamma, -\delta) \quad \text{e} \quad (\delta, \gamma), \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{3}, \quad \delta = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{3}.$$

Il primo intervallo contiene β, il secondo contiene α. Poiché $g'(x) < 0$ in questi intervalli, la convergenza del metodo risulta garantita in intorni circolari delle soluzioni di raggio $0.3 < \alpha - \delta$.

Esercizio 3. a) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -B \\ O & C \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice J è triangolare a blocchi e i suoi autovalori sono della forma $\lambda = \frac{1}{2}\,\mu$, dove μ sono gli autovalori della C. Perciò gli autovalori di J sono $\pm 1/2$ (ciascuno con molteplicità 2). Ne segue che il metodo di Jacobi è convergente.

b) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

G è triangolare superiore, quindi i suoi autovalori sono 0 e $1/4$ (ciascuno con molteplicità 2). Ne segue che il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

c) Poiché $\rho(J) = 1/2$ e $\rho(G) = 1/4$, il metodo di Gauss-Seidel risulta più veloce di quello di Jacobi.

d*) Risulta

$$P = \begin{bmatrix} B & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O & -B \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -B \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & -I \\ O & O \end{bmatrix}.$$

Quindi gli autovalori di P sono tutti nulli e il metodo iterativo avente P come matrice di iterazione è convergente.

Esercizio 4. Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

perciò nell'intervallo di integrazione $[5, 10]$ è

$$|f''(x)| \le \frac{1}{5^2}, \qquad |f^{(4)}(x)| \le \frac{6}{5^4}.$$

Maggiorando i resti si ha

$$|R_2^{(N)}| \le \frac{5^3}{5^2\ 12N^2} = \frac{5}{12N^2}, \qquad |R_3^{(N)}| \le \frac{5^5}{5^4\ 2880N^4} = \frac{1}{96N^4}$$

e

$$|R_2^{(10)}| \le \frac{5}{1200} \sim 0.0042, \qquad |R_3^{(10)}| \le \frac{1}{960000} \sim 10^{-6}.$$