CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

15/9/2004

Esercizio 1. a) Sia $\varepsilon_{\text{in}} = c_x\varepsilon_x + c_y\varepsilon_y$ con

$$c_x = \frac{2}{f(x,y)}, \quad c_y = -\frac{2}{f(x,y)}.$$

Quindi il calcolo di $f(x,y)$ è malcondizionato per valori di x e y tali che $f(x,y)$ stia nell'intorno di 0, cioè quando $x \approx y$.

b) Dai grafi risulta

$$\varepsilon_{\text{alg1}} = \varepsilon^{(5)} + \frac{1}{f(x,y)}\left(\log x^2\left(\varepsilon^{(3)} + \frac{1}{\log x^2}\,\varepsilon^{(1)}\right) - \log y^2\left(\varepsilon^{(4)} + \frac{1}{\log y^2}\,\varepsilon^{(2)}\right)\right),$$

dove $\varepsilon^{(i)}$, $i = 1,\dots,5$ sono errori locali, da cui si ha

$$|\varepsilon_{\text{alg1}}| < u\left(1 + \frac{1}{|\log x - \log y|}\,(1 + |\log x| + |\log y|)\right) = M_1.$$

Per il secondo algoritmo abbiamo:

$$\varepsilon_{\text{alg2}} = \eta^{(3)} + \frac{\log x}{\log x - \log y}\,\eta^{(1)} - \frac{\log y}{\log x - \log y}\,\eta^{(2)}$$

dove $\eta^{(i)}$, $i = 1,2,3$ sono errori locali, da cui si ha

$$|\varepsilon_{\text{alg2}}| < u\left(1 + \frac{|\log x| + |\log y|}{|\log x - \log y|}\right) = M_2.$$

Per il terzo algoritmo risulta

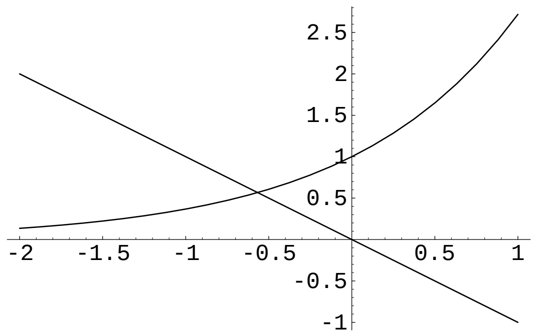
$$\varepsilon_{\text{alg3}} = \mu^{(4)} + \frac{1}{f(x,y)}\left(\mu^{(3)} - \mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right),$$

dove $\mu^{(i)}$, $i = 1,2,3$ sono errori locali, da cui

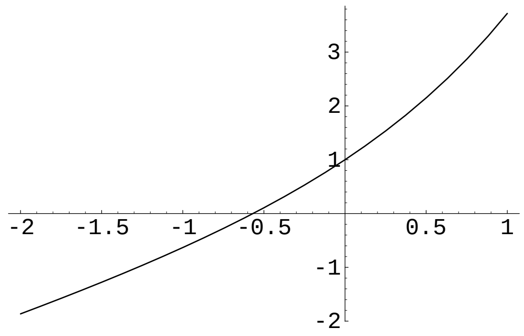
$$|\varepsilon_{\text{alg3}}| < u\left(1 + \frac{3}{2|\log x - \log y|}\right) = M_3.$$

Risulta $M_1 > M_2$ ed inoltre $M_2 \geq M_3$ per x, y tali che $|\log x| + |\log y| \geq 3/2$. Tutti e tre gli algoritmi sono instabili per $x \approx y$.

Esercizio 2. a) Dal grafico delle funzioni $y = \alpha x$ per $\alpha < 0$ e $y = \mathrm{e}^x$

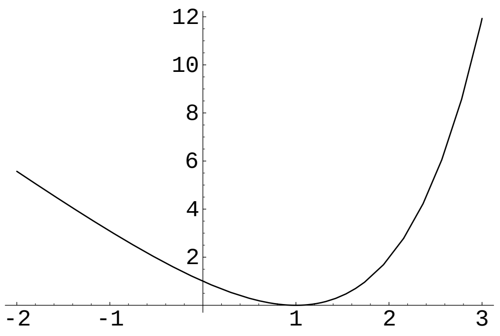


risulta che per $\alpha < 0$ l'equazione ha una sola radice reale negativa β. Inoltre per $x < \beta$ è $f(x) < 0$ e per $x > \beta$ è $f(x) > 0$, come si vede dal grafico seguente



Poiché è $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ per ogni x, scegliendo $x_0 > \beta$ si ottiene una successione monotona decrescente, convergente a β. D'altra parte, se si sceglie $x_0 < \beta$ si ottiene $x_1 > \beta$ e si ricade nel caso precedente. L'ordine di convergenza risulta 2.

b) Vi è una soluzione γ di molteplicità 2 se $f(\gamma) = 0$ e $f'(\gamma) = 0$, cioè se γ è soluzione del sistema $\mathrm{e}^x = \alpha x, \quad \mathrm{e}^x = \alpha$. Questo accade per $x = 1$, quindi $\gamma = 1$ e $\alpha = \mathrm{e}$. Per questo valore del parametro α il grafico di $f(x)$ risulta



Vi è convergenza monotona sia che x_0 sia scelto a destra che a sinistra di γ. L'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3. a) Il metodo di Gauss senza scambi di riga, cioè senza alcuna strategia di pivoting, può essere applicato quando le matrici principali di testa di ordine k con $1 \le k \le n-1$ sono non singolari. Occorre quindi vedere per quali α e β le sottomatrici principali di ordine 1 e 2 sono non singolari. Poichè tali sottomatrici risultano non singolari indipendentemente da α e β che non vi appaiono, il metodo di Gauss è sempre applicabile.

Con un passo di eliminazione gaussiana otteniamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha\beta/2 & 1-\beta/2 \end{array}\right].$$

Nel caso $2 - \alpha\beta/2 \neq 0$, che corrisponde al fatto che $\det A \neq 0$, la soluzione esiste, unica ed è data da

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (2-\alpha)/(4-\alpha\beta) \\ 1 \\ (2-\beta)/(4-\alpha\beta) \end{bmatrix}.$$

Se $2 - \alpha\beta/2 = 0$, la matrice è singolare ed abbiamo infinite soluzioni solo se $1 - \beta/2 = 0$. In questo caso le soluzioni sono del tipo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 1/2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Se $2 - \alpha\beta/2 = 0$ e $\beta \neq 2$ non ci sono soluzioni.

b) I metodi iterativi risultano convergenti se il raggio spettrale delle matrici di iterazione sono < 1. Il polinomio caratteristico della matrice di Jacobi risulta $p_J(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha\beta/4)$. Per cui abbiamo $\rho(J) = \sqrt{|\alpha\beta|}/2$, da cui otteniamo $|\alpha\beta| < 4$. Per il metodo di Gauss-Seidel il polinomio caratteristico risulta $p_G(\lambda) = \lambda^2(\alpha\beta/4 - \lambda)$. $\rho(G) = |\alpha\beta|/4$, da cui otteniamo sempre che $|\alpha\beta| < 4$. Si noti che se convergenti, il metodo di Gauss-Seidel risulta convergere piu' velocemente del metodo di Jacobi perchè $\rho(G) < \rho(J)$.

Esercizio 4. È $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$, $f''(x) = 6x + 4$. Quindi

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) = 10.$$

Il resto della formula dei trapezi risulta perciò maggiorato in modulo da

$$|R_2^{(N)}| \leq \frac{5}{6N^2}.$$

Imponendo che tale maggiorazione sia a sua volta maggiorata da 10^{-6} si ottiene che basta scegliere $N \geq 913$.