CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

15/6/2004

Esercizio 1. a) L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{4x^4}{x^4 - 1}.$$

Poiché $x > 0$, il problema risulta mal condizionato in un intorno di 1 e ben condizionato sufficientemente lontano da 1. È ben condizionato anche per x grande. Infatti $\lim_{x \to \infty} c_x = 4$.

b) Dal grafo relativo all'espressione $(x^2)^2 - 1$ si ottiene che l'errore analitico è

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon_3 + \frac{x^4}{x^4 - 1} (\epsilon_2 + 2\,\epsilon_1),$$

dove ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 sono gli errori locali del primo quadrato, del secondo quadrato e della sottrazione. Per cui

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\Big(1 + \frac{3x^4}{|x^4 - 1|}\Big),$$

dove u è la precisione di macchina. Quindi l'algoritmo risulta instabile in un intorno di 1. Dal grafo relativo all'espressione $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ si ottiene che l'errore analitico è

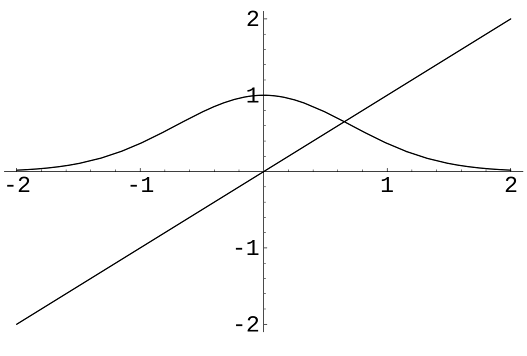
$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \frac{2x^4}{x^4 - 1}\,\epsilon_1,$$

dove ϵ_4, ϵ_5 e ϵ_6 sono gli errori locali di $x^2 - 1$, di $x^2 + 1$ e dell'ultima moltiplicazione. Per cui

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\Big(3 + \frac{2x^4}{|x^4 - 1|}\Big),$$

dove u è la precisione di macchina. Quindi questo algoritmo presenta le stesse caratteristiche di stabilità del primo.

Esercizio 2. a) Dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$



risulta che l'equazione ha in effetti una sola radice reale $\alpha > 0$. Per vedere che $\alpha > 1/2$, si verifica che $g(\alpha) = \mathrm{e}^{-1/4} = 1/\mathrm{e}^{1/4} > 1/2$, infatti $1/\mathrm{e} > 1/2^4$.

b) È $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x2}$, per cui $g'(\alpha) = -2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha 2} = -2\alpha g(\alpha) = -2\alpha 2$. Essendo $\alpha > 1/2$, è $g'(\alpha) < -1/2$. Per vedere che $-1 < g'(\alpha)$ si verifica che $\alpha 2 < 1/2$, cioè che $\alpha < 1/\sqrt{2}$, cioè che $g(1/\sqrt{2}) = \mathrm{e}^{-1/2} = 1/\mathrm{e}^{1/2} < 1/\sqrt{2}$, infatti $\mathrm{e} > 2$.

Ne segue che vi è convergenza locale e che l'ordine di convergenza è 1. Inoltre $0 < g(x_0) < 1$ per ogni x_0, per cui $0 < x_1 < 1$ per ogni x_0. È facile verificare, anche direttamente sul grafico, che in tale intervallo c'è convergenza alternata.

Esercizio 3. a) È

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \frac{17}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4},$$

quindi l'equazione è biquadratica in quanto contiene solo potenza pari di λ.

b) Segue da $p(-\lambda) = p(\lambda)$.

c) Vi sono tre cerchi disgiunti di Gerschgorin: uno di centro l'origine e raggio $1/2$ che corrisponde alla seconda e terza riga di C e che contiene due autovalori reali λ_1 e λ_2, con $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1/2$, uno di centro -2 e raggio $1/2$ che contiene λ_3 e uno di centro 2 e raggio $1/2$ che contiene λ_4. Poiché $\lambda_4 = -\lambda_3$, è $\rho(C) = \lambda_4$.

d) È $\alpha = 3/2$ e $\beta = 5/2$.

e) I metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel non sono applicabili perché C ha due elementi principali nulli.

Esercizio 4. È $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = 5/3$. Quindi

$$p(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x + 3).$$

Dal teorema si ha che per ogni x

$$r(x) = x(x-1)(x-2)\frac{f'''(\xi)}{3!}$$

Poiché $f'''(x) = -12/(1+x)^4$, risulta $r(x) = -2x(x-1)(x-2)/(1+\xi)^4$. Ne segue che

$$\max_{0\le x\le 2} |r(x)| \le 2\,\frac{\max\limits_{0\le x\le 2} |x(x-1)(x-2)|}{\min\limits_{0\le x\le 2} (1+x)^4} \le 2 \max_{0\le x\le 2} |x(x-1)(x-2)| < 4.$$

Invece studiando

$$r(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \frac{1}{3}(x^2 - x + 3) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{3(x+1)} = \frac{-x(x-1)(x-2)}{3(x+1)}$$

si trova che $\max\limits_{0\le x\le 2} |r(x)| < 4/3$.