CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

10/2/2004

Esercizio 1. a) Deve essere $0 \leq x \leq 1$. L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = -\frac{\sqrt{x}}{4(1-\sqrt{x})}.$$

Quindi il problema risulta mal condizionato in un intorno sinistro di 1 e ben condizionato in un intorno destro di 0.

b) Dal grafo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \epsilon_1 & & \epsilon_2 & & \epsilon_3 \\ \boxed{x} & \longrightarrow & \boxed{\sqrt{x}} & \xrightarrow{\frac{-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} & \boxed{1-\sqrt{x}} & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & \boxed{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \end{array}$$

risulta

$$\epsilon_{alg} = \epsilon_3 + \frac{1}{2}\epsilon_2 - \frac{\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})}\epsilon_1,$$

per cui

$$|\epsilon_{alg}| < u\Big(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})}\Big),$$

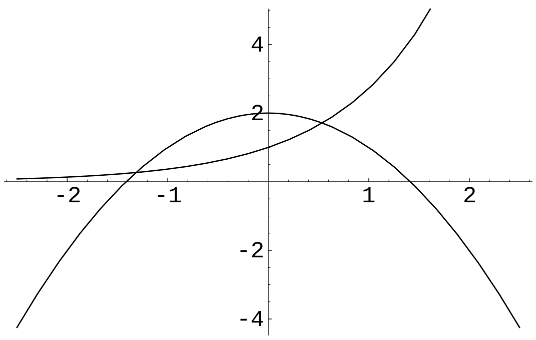
dove u è la precisione di macchina. Quindi l'algoritmo risulta instabile in un intorno sinistro di 1 e stabile in un intorno destro di 0.

c*) Poiché

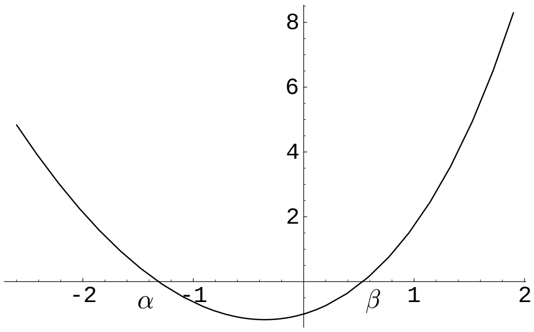
$$\max_{x\in[0,1/4]} \frac{\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{1/4}}{2(1-\sqrt{1/4})} = \frac{1}{2},$$

per $x \in [0, 1/4]$ risulta $|\epsilon_{alg}| < 2u$. Quindi l'errore algoritmico risulta maggiorato in modulo da 10^{-6} se $u = 10^{-6}/2$.

Esercizio 2. Dal grafico delle funzioni $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ e $f_2(x) = 2 - x^2$



risulta che l'equazione ha due radici reali $\alpha \in [-1.5, -1]$ e $\beta \in [0, 1]$. Dal grafico della $f(x)$



risulta che $f'(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ si annulla in un punto $m \in (-1, 0)$ e che $f''(x)$ non si annulla mai. Quindi il metodo delle tangenti converge ad α per $x_0 < m$ (in modo monotono crescente se $x_0 < \alpha$) o a β per $x_0 > m$ (in modo monotono decrescente se $x_0 > \beta$). In ogni caso l'ordine è 2.

Esercizio 3. a) Il metodo di Jacobi è applicabile per ogni α. La matrice di iterazione è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - \alpha^2),$$

quindi $\rho(J) = |\alpha|$ e il metodo di Jacobi è convergente per $|\alpha| < 1$.

b) Il metodo di Jacobi non è applicabile per $\alpha = 0$ perché nella matrice permutata vi sono due elementi principali nulli. La matrice di iterazione è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\alpha & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2\big(\lambda^2 - \frac{1}{\alpha^2}\big),$$

quindi $\rho(J) = 1/|\alpha|$ e il metodo di Jacobi è convergente per $|\alpha| > 1$.

c) In questo caso il metodo di Jacobi non è applicabile perché nella matrice permutata vi sono due elementi principali nulli.

Esercizio 4. È

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{1}{3}\,(x + 2), \\
r_1(x) &= (x-1)(x-4)\,\frac{f''(\xi)}{2} = -(x-1)(x-4)\,\frac{1}{8\sqrt{\xi^3}}, \quad \xi \in (1, 4), \\
p_2(x) &= \frac{6}{17}\,(x + 2), \\
r_2(x) &= (x - \frac{16}{9})(x - \frac{9}{4})\,\frac{f''(\xi)}{2} = -(x - \frac{16}{9})(x - \frac{9}{4})\,\frac{1}{8\sqrt{\xi^3}}, \quad \xi \in (\frac{16}{9}, \frac{9}{4}),
\end{aligned}$$

Poiché $\sqrt{\xi^3} > 0$ per ogni $\xi \in [1,4]$, risulta $r_1(x) > 0$ per $x \in (1,4)$ e $r_1(x) = 0$ per $x = 1$ e $x = 4$, mentre $r_2(x) > 0$ per $x \in (16/9, 9/4)$, $r_2(x) < 0$ per $x \in [1, 16/9) \cup (9/4, 4]$ e $r_2(x) = 0$ per $x = 16/9$ e $x = 9/4$.

c*) Per $x = 3.5$ si ha $r_1(x) > 0$ e $r_2(x) < 0$, quindi $f(x) > p_1(x)$ e $f(x) < p_2(x)$. Ne segue che

$$p_1(3.5) < f(3.5) < p_2(3.5),$$

cioè $11/6 < \sqrt{3.5} < 33/17$.