CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

6/7/2004

Esercizio 1. a) In $\mathcal{F}_{2,6,m,M}$ è $\quad x_t = (0.101010)_2 \quad$ e $\quad x_a = (0.101011)_2$.

b)

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{2}{3}.$$

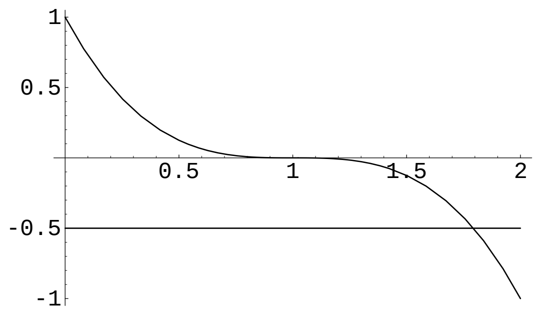
c) La rapppresentazione di x in base 10 è periodica.

d)

$$x_t = (0.101010)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32} \quad \text{e} \quad x_a = x_t + \frac{1}{64} = \frac{43}{64}.$$

$$\epsilon_t = \frac{x_t - x}{x} = -\frac{1}{64} \quad \text{e} \quad \epsilon_a = \frac{x_a - x}{x} = \frac{1}{128}.$$

Esercizio 2. a) Dal grafico delle funzioni $f_1(x) = (1-x)^3$ e $f_2(x) = -1/2$



risulta evidente che l'equazione ha una sola radice reale $\xi > 1$. Per cercare un intervallo di separazione come quello richiesto, consideriamo un valore $\beta < 2$ tale che $\beta > \xi$. Poiché $f_1(\beta) = (1-\beta)^3$, basta che $(1-\beta)^3 < -1/2$. Ad esempio $\beta = 1.9$ va bene. Quindi l'intervallo $[0.9, 1.9]$ soddisfa la richiesta.

b) Per $x > \xi$ è $f(x)f''(x) > 0$. Quindi scegliendo un punto $x_0 > \xi$ la successione x_i prodotta dal metodo delle tangenti è decrescente e converge a ξ. Se $x_0 \in (1, \xi)$ risulta $x_1 > \xi$ e quindi si ha ugualmente convergenza. Se $x_0 = 1$ il metodo non è applicabile. Se $x_0 < 1$ la successione prodotta risulta crescente ed è possibile che per un qualche indice k risulti $x_k = 1$. In tal caso il metodo non è applicabile. Se non accade mai che un'iterata valga 1, prima o poi succederà che un iterata diventi maggiore di ξ e da quel punto vi sarà convegenza monotona a ξ.

Esercizio 3. a) È

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Detti λ_A gli autovalori di A, deve accadere che $\lambda_A^2 = 1$. Poiché A è simmetrica, i suoi autovalori sono reali, quindi deve essere $\lambda_A = 1$ oppure $\lambda_A = -1$.

b) Gli autovalori λ_B di B verificano la relazione $\lambda_B = \lambda_A + 1$. La matrice B ha solo due righe linearmente indipendenti, quindi due soli autovalori non nulli. Ai due autovalori nulli di B corrispondono due autovalori di A uguali a -1. Gli altri due autovalori di A devono essere uguali a 1, quindi corrispondono a due autovalori di B che valgono 2.

c) Sia $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$. Il sistema richiesto è $(I + B)\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ e può essere risolto con il metodo di Jacobi in quanto la sua matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

Esercizio 4. a) È $f(x_0) = 5/8$, $f(x_1) = -9/8$ e $f(x_2) = -15/8$. Quindi

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{8}.$$

b) È $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$ e $f'(x) = 0$ per $x_1 = (4 - \sqrt{7})/3$ e $x_2 = (4 + \sqrt{7})/3$. Il minimo di $f(x)$ risulta $f_m = f(x_2) = -(14\sqrt{7} + 20)/27 \sim -2.11261$. Il minimo di $p(x)$ risulta $p_m = p(11/4) = -61/32 = -1.90625$. Quindi l'errore relativo che si commette approssimando f_m con p_m è $(f_m - p_m)/f_m \sim 0.098$.