
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

15/06/2004

Esercizio 1 Quale delle due espressioni equivalenti (dal punto di vista matematico)

$$(x^2)^2 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

è più stabile? Si studi anche il condizionamento del problema per ogni $x > 0$.

Esercizio 2 È data l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{dove } g(x) = e^{-x^2}.$$

- Si verifichi che l'equazione ha un'unica soluzione reale $\alpha > 0.5$.
- Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$.

Esercizio 3 È data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A + B + I & B \\ B & A + B - I \end{pmatrix}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

ed I è la matrice identica di ordine 2.

- Si verifichi che l'equazione caratteristica di C è biquadratica.

Senza calcolare gli autovalori, si dimostri che

- se λ è autovalore di C , anche $-\lambda$ lo è,
- C ha un autovalore uguale al suo raggio spettrale $\rho(C)$,
- esistono due costanti α e β , con $0 < \alpha < \beta$ tali che $\alpha \leq \rho(C) \leq \beta$.
- Si dica se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel possono essere applicati ad un sistema con matrice C .

Esercizio 4 Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

nei nodi $x_i = i$, per $i = 0, 1, 2$. Sia $r(x) = f(x) - p(x)$. Si confronti una maggiorazione di $|r(x)|$ ottenuta sfruttando il teorema con una maggiorazione ottenuta studiando $r(x)$.