
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

06/07/2004

Esercizio 1 Si consideri il numero reale x che ha in base 2 la seguente rappresentazione periodica

$$x = 0.\overline{10}_2$$

- Si scrivano in $\mathcal{F}_{2,6,m,M}$ i numeri $x_t = \text{trn}(x)$ e $x_a = \text{arr}(x)$.
- Si scriva x come frazione con numeratore e denominatore interi in base 10 (si sfrutti la relazione $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ per $|r| < 1$).
- Si dica se la rappresentazione in base 10 di x è finita, oppure periodica, oppure infinita non periodica.
- Si scrivano x_t e x_a in base 10 e si dica quanto valgono i loro errori relativi.

Esercizio 2 È data l'equazione

$$(1-x)^3 = -\frac{1}{2}.$$

- Si verifichi che l'equazione ha un'unica soluzione reale ξ e se ne dia un intervallo $[\alpha, \beta]$ di separazione di ampiezza minore o uguale a 1 tale che $\alpha < 1$.
- Si studi la convergenza del metodo delle tangenti al variare del punto iniziale nell'intervallo $[\alpha, \beta]$.

Esercizio 3 È data la matrice A di ordine 4 di elementi

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j=5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la matrice $B = I + A$, dove I è la matrice identica di ordine 4. Senza costruire i polinomi caratteristici di A e di B ,

- si verifichi che $A^2 = I$ e si dica che relazione devono verificare gli autovalori di A ,
- si dica che relazione c'è fra gli autovalori di A e di B e quanti sono gli autovalori nulli di B . Da questo si deduca quali sono gli autovalori di A e di B .
- Si scriva un sistema lineare che abbia come soluzione la prima colonna dell'inversa della matrice $I + B$. Il metodo di Jacobi consente di risolvere tale sistema?

Esercizio 4 È data la funzione

$$f(x) = x(x-1)(x-3)$$

- Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ nei nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 5/2$.
- Siano f_m e p_m i valori minimi rispettivamente di $f(x)$ e di $p(x)$ nell'intervallo $[0, 3]$. Si dica che errore si commette se si approssima f_m con p_m .