CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

9/7/2003

Esercizio 1 Con l'algoritmo di conversione in base 2 si ha

$$\sqrt{5} = 10.0011\ldots_2 .$$

L'y cercato è quindi il numero di 4 cifre significative ottenuto con l'arrotondamento. Quindi $y = 10.01_2$ e si ha

$$\left|\frac{y-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right| = \frac{y-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10.01_2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2.25-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

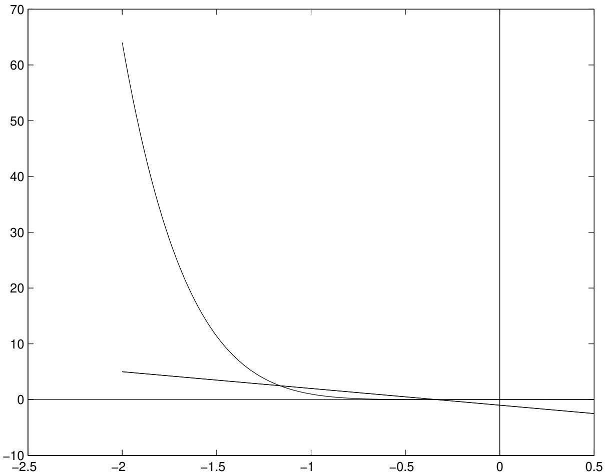
Abbiamo

$$\frac{2.25-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \frac{2.25-2.236}{2.236} = \frac{0.014}{0.236} < \frac{10^{-3}}{2}$$

che è la precisione di macchina per l'arrotondamento.

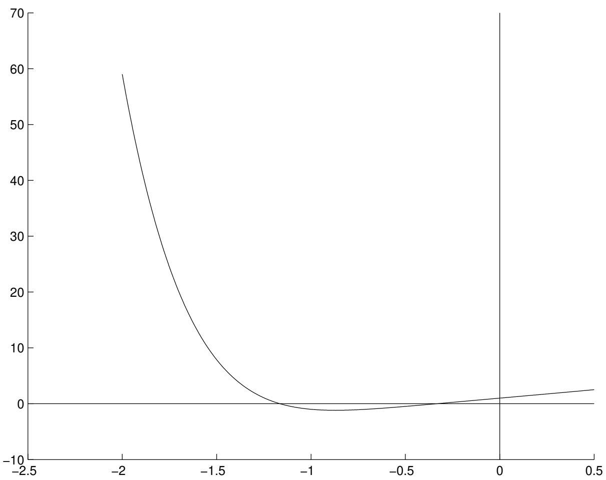
Esercizio 2 Sia $f(x) = x^6 + 3x + 1$.

a) L'equazione data è equivalente a $x^6 = -3x - 1$.



Dal grafico di $y = x^6$ e di $y = -3x - 1$, risulta che vi sono due soluzioni reali, $\alpha \in (-2, -1)$ e $\beta = (-1, 0)$.

b)



Dal grafico di $y = f(x)$ risulta che il metodo delle tangenti risulta convergente ad α per ogni $x_0 < m$ e a β per ogni $x_0 > m$, dove m è il punto di minimo, cioè $m = -1/\sqrt[5]{2}$. L'ordine di convergenza è 2 in ogni caso.

c) Dal grafico di $y = g(x)$ risulta che vi è convergenza a β per ogni $x_0 \in (\alpha, -\alpha)$ (di ordine 1) e non vi è convergenza per $x_0 < \alpha$ o $x_0 > -\alpha$.

Esercizio 3

a) Non esistono valori di k per cui la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

b) La matrice d'iterazione del metodo di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo che il polinomio caratteristico di J risulta

$$\det(J - \lambda I) = (\lambda^2 - \frac{1}{2})(\lambda^2 - \frac{k}{8}).$$

Gli autovalori di J sono allora $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $|\lambda_{3,4}| = \sqrt{\frac{|k|}{8}}$. Quindi il metodo di Jacobi converge per

$$|k| < 8.$$

La matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & k/8 & 0 \\ & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo che il polinomio caratteristico di G risulta

$$\det(G - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - \frac{k}{8})(\lambda - \frac{1}{2}).$$

Gli autovalori di G sono allora $\lambda_{1,2} = 0$ e $|\lambda_3| = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = \frac{k}{8}$. Quindi il metodo di Gauss-Seidel converge per

$$|k| < 8.$$

c) La massima velocità di convergenza si ha per $|k| \leq 4$ per entrambi i metodi ed il raggio spettrale è $1/\sqrt{2}$ nel caso di Jacobi e $1/2$ nel caso di Gauss-Seidel.

Esercizio 4 Si cerca il polinomio di interpolazione di grado al più 3:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

i cui coefficienti verificano il sistema

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si ricava $a_3 = a_1 = 0$, $a_2 = 1/3$ e $a_0 = 2/3$. Quindi $p(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$. Un tale risultato era da attendersi dato il carattere simmetrico dei dati.

b) Se $p(3) = k$ il problema interpola anche la funzione con i punti aggiunti. Questo accade per $k = 11/3$. In tal caso il polinomio di interpolazione ha grado 2, che è il minimo possibile, visto che i punti non sono allineati.