CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

7/2/2003

Esercizio 1 Per studiare il condizionamento del calcolo di $f(x)$ occorre esaminare l'errore inerente che è dato da

$$\varepsilon_{\text{in}} = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\varepsilon_x.$$

Osserviamo che numeratore e denominatore si annullano per $x \to 0$. Ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to 0} 1 - x = 1$$

quindi il problema è ben condizionato per $x \to 0$. Notiamo che il coefficiente di amplificazione c_x tende a 0 per $x \to +\infty$, mentre $c_x \to +\infty$ per $x \to -\infty$, quindi il problema è mal condizionato solo per $x \to -\infty$.

La stabilità può essere studiata valutando l'errore algoritmico, che risulta

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \varepsilon_2 - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\varepsilon_1,$$

dove ε_1 e ε_2 sono errori locali. Passando ai moduli, e sapendo che $|\varepsilon_i| \leq u$, per $i = 1, 2$, abbiamo

$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq u\left(1 + \left|\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right|\right).$$

Per $x \to 0$ il calcolo di $f(x)$ risulta instabile.

Esercizio 2

a) Imponendo l'uguaglianza $x = g(x)$ otteniamo l'equazione

$$x = \alpha^2 x^3 - 3\alpha x^2 + 3x,$$

dalla quale ricaviamo che le soluzioni sono $0, 1/\alpha, 2/\alpha$.

b) Poichè $g'(x) = 3(\alpha x - 1)^2$ la funzione è sempre crescente. Inoltre $g"(x) = 6\alpha(\alpha x - 1)$ quindi in $x = 1/\alpha$ c'è un flesso.

Osserviamo che $g'(0) = 3$ e $g'(2/\alpha) = 3$ quindi per il teorema del punto fisso non abbiamo convergenza locale alle soluzioni 0 e$2/\alpha$. Abbiamo invece convergenza a $1/\alpha$ in quanto $g'(1/\alpha) = 0$. In particolare osserviamo che

$$|g'(x)| < 1 \qquad \text{per } x \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3\alpha}, \frac{3+\sqrt{3}}{3\alpha}\right)$$

e quindi è garantita la convergenza a partire da un x_0 in tale intervallo. In realtà si osserva che abbiamo convergenza a $1/\alpha$ partendo da un qualsiasi punto in $(0, 2/\alpha)$.

c) L'ordine di convergenza è 3 in quanto

$$g'(1/\alpha) = g"(1/\alpha) = 0, \quad g'''(1/\alpha) \neq 0.$$

d) Questo metodo può servire ad approssimare il reciproco di un numero α senza utilizzare divisioni.

Esercizio 3

a) Applicando Gauss alla matrice $[A|I]$ abbiamo

$$\left[A^{(1)}|I\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] = \left[A^{(3)}|B^{(3)}\right]$$

Risolvendo il sistema triangolare $A^{(3)}X = B^{(3)}$, otteniamo l'inversa di A

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1/20 & -1/10 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

b)Il numero di condizionamento di A in norma infinito risulta

$$\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty,$$

quindi poiché $\|A\|_\infty = 5$ e $\|A^{-1}\|_\infty = 9/5$, $\mu_\infty(A) = 9$.

c) Le matrici di Jacobi e di Gauss-Seidel risultano

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/24 & 0 \end{bmatrix}.$$

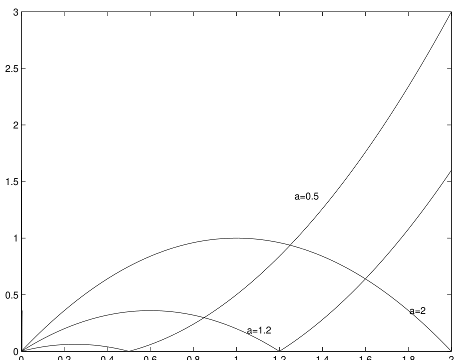
Gli autovalori di J sono $0, 0, 1/\sqrt{6}$ e $-1/\sqrt{6}$ quindi il metodo di Jacobi è convergente. Anche Gauss-Seidel risulta convergente in quanto gli autovalori di G risultano $0, 0, 0, 1/6$.

Esercizio 4 Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = (a-1)x - 2.$$

Osserviamo che $\max_{0\le x\le 2} |p(x) - f(x)| = \max_{0\le x\le 2} |x(x-a)|$.

Il grafico di $y = |x(x-a)|$ per alcuni valori di a risulta



quindi

$$\max_{0\le x\le 2} |p(x) - f(x)| = \max\left\{2(2-a), a^2/4\right\}.$$

Quindi per $0 \le a \le 4\sqrt{2} - 4$ tale massimo è $2(2-a)$ per $4\sqrt{2} - 4 \le a \le 2$ il massimo è $a^2/4$. Il minimo per $a \in [0, 2]$ è assunto nel punto $a = 4\sqrt{2} - 4$ e risulta $12 - 8\sqrt{2}$.