CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

4/6/2003

Esercizio 1 È $f(x,y) = x^2 - y^2$.

a) Il condizionamento di $f(x,y)$ è misurato dall'errore inerente;

$$\varepsilon_{\text{in}} = c_x\varepsilon_x + c_y\varepsilon_y = \frac{2x^2\varepsilon_x - 2y^2\varepsilon_y}{x^2 - y^2}.$$

Quindi

$$|\varepsilon_{\text{in}}| \le \frac{2(x^2+y^2)}{|x^2-y^2|} \max |\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|.$$

Poichè $|x^2 - y^2|$ può essere abitrariamente piccolo, $|\varepsilon_{\text{in}}|$ risulta non superiormente limitato in sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ contenenti coppie di punti (x,y) con $|x| \approx |y|$.

b) Operando con arrotondamento si ha

$$\tilde{x} = 3.1 \quad \tilde{x^2} = 9.6,$$

$$\tilde{y} = 2.7 \quad \tilde{y^2} = 7.3,$$

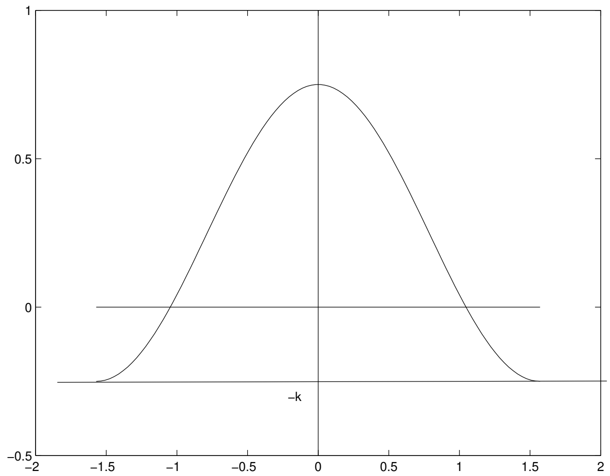
e $\tilde{\det} M = 2.3$. L'errore relativo commesso è dato da

$$\left|\frac{\det M - \tilde{\det} M}{\det M}\right| = \frac{\pi^2 - e^2 - 2.3}{\pi^2 - e^2} < \frac{3.416^2 - \tilde{y^2} - 2.3}{2.3} < 0.118.$$

Esercizio 2

a)Dal grafico di $\cos^2 x$ risulta evidente che l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni reali di uguale modulo e segno opposto per ogni $k \in [0,1]$.

b) Per $0 < k < 1/2$ il grafico di $f(x)$ risulta



con $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. In questo intervallo è $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) > 0$. Quindi la convergenza monotona del metodo delle tangenti è assicurata scegliendo $x_0 \in (\pi/4, \alpha)$. Inoltre esiste un punto $\bar{x} > \alpha$ tale che per ogni $x_0 \in (\pi/4, \bar{x})$ si ha convergenza anche se non necessariamente monotona. L'ordine del metodo è 2.

c) Analogo a b) con $x_0 \in (\alpha, \pi/4$.

d) Per $k = 1/2$ è $\alpha = \pi/4$, e $f'(\alpha) < 0$ ma $f''(\alpha) = 0$, quindi posto

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

si ha

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0,$$

$$g''(\alpha) = \left[\frac{f'^2 f'' + f f' f''' - 2 f f''^2}{f'^3}\right]_{(x=\alpha)} = 0.$$

Inoltre $g'''(\alpha) \neq 0$. Quindi il metodo è del terzo ordine. Ne segue che esiste un intervallo circolare di α in cui si può scegliere un x_0 che dia luogo ad una successione convergente. Per determinare un idoneo punto iniziale cerchiamo un intorno circolare di $\alpha = \pi/4$ tale che $|g'(x)| < 1$, cioè

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2.$$

Risulta

$$|(\cos^2 x - \frac{1}{2})(2\cos^2 x - 1)| < 2(\cos^2 x - \cos^4 x).$$

Posto $y = 2(cos^2 x - cos^4 x)$ si ha

$$|\frac{1}{2} - y| < y, \text{ con} y > 0.$$

Questa disuguaglianza è verificata per $y > \frac{1}{2}$. Sostituendo si ha

$$8t^2 - 8t + 1 < 0, \text{con} t = \cos^2 x.$$

Quindi la disuguaglianza risulta verificata per

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < t < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

cioè per $x \in (\arccos\sqrt{1/2 + \sqrt{2}/4}, \arccos\sqrt{1/2 - \sqrt{2}/4})$.

Esercizio 3 Si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 1. \end{bmatrix}$$

a) $I_1 = \{\alpha : |\alpha| < 1/2\}$.

b) La matrice di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ 0 & -\alpha & 1 & \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & & \\ 0 & 0 & \alpha & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di G sono la soluzione dell'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 3\alpha^2\lambda + \alpha^4) = 0,$$

ed esattamente $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

$$\lambda_3 = \frac{\alpha^2}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad \lambda_4 = \frac{\alpha^2}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Imponendo che $\lambda_4 < 1$ si ha

$$I_2 = \left\{ \alpha : |\alpha| < \sqrt{\frac{2}{3 + \sqrt{5}}} \right\}.$$

c) Poichè $\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}} > \frac{1}{2}$, risulta $I_1 \subset I_2$.

Esercizio 4

a) Il polinomio $p_2(x)$ interpola $f(x)$ nei nodi $0, 1/2, 1$ e risulta

$$p_2(x) = (2 - \frac{1}{2^{n-2}})x^2 + (\frac{1}{2^{n-2}} - 1)x.$$

b) Dalla formula del resto abbiamo

$$r_m(x) = \pi_m(x)\frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}.$$

Poichè $m + 1 = n$ e $f^n(x) = n!$ otteniamo che

$$p_m(x) = f(x) - r_m(x) = x^n - \pi_m(x).$$

Si noti che $p_m(x)$ risulta un polinomio di grado $m = n - 1$ in quanto i termini di grado n si cancellano.

c) $p_n(x) = f(x)$ per l'unicità del polinomio di interpolazione.