CORREZIONE DELLA PRIMA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO
Compito A

4/11/2003

Esercizio 1

a) In $\mathcal{F}(2,4,m,M)$, $x = 0.0\overline{0011}$, $y = 0.\overline{01}$ e $z = 0.\overline{110001}$. Da cui, operando con arrotondamento alla quarta cifra significativa, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \text{arr}(0.00011001) = (0.0001101)_2 = \frac{13}{128};\\
\tilde{y} &= \text{arr}(0.010101) = (0.01011)_2 = \frac{11}{32};\\
\tilde{z} &= \text{arr}(0.11000) = (0.11)_2 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

b) Sia $p_1 = \tilde{x} \otimes \tilde{y} = \text{arr}(\tilde{x} \times \tilde{y})$, abbiamo

$$\tilde{x} \times \tilde{y} = \frac{13}{128}\frac{11}{32} = \frac{143}{4076},$$

da cui

$$p_1 = (0.00001001)_2 = \frac{9}{256},$$

ed $r_1 = p_1 \oslash \tilde{z} = \text{arr}(p_1/\tilde{z})$.

$$p_1/\tilde{z} = \frac{9}{256}\frac{4}{3} = \frac{3}{64} = (0.000011)_2,$$

e quindi $r_1 = 3/64$.

Con il secondo algoritmo, sia $d_2 = \tilde{y} \oslash \tilde{z}$, abbiamo

$$\tilde{y}/\tilde{z} = \frac{11}{32}\frac{4}{3} = \frac{11}{24} = (0.011\overline{10})_2,$$

da cui

$$d_2 = (0.01111)_2 = \frac{15}{32},$$

ed $r_2 = \tilde{x} \otimes d_2 = arr(\tilde{x} \times d_2)$.

$$\tilde{x} \times d_2 = \frac{195}{2^{11}} = (0.000011000011)_2,$$

e quindi $r_2 = \text{arr}(0.0000110) = (0.000011) = 3/64$. Cioè $r_1 = r_2$. Si noti che $\text{arr}(R) = (0.00001011)_2 \neq r_1$.

Esercizio 2

a) Per analizzare il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$ occorre studiare l'errore inerente, che è dato da $\varepsilon_{\text{in}} = c_x\,\varepsilon_x$, con ε_x errore commesso sul dato x e maggiorabile dalla precisione di macchina u. Il problema è ben condizionato per ogni $x > 0$ se è possible maggiorare $|c_x|$ con una costante. Abbiamo

$$c_x = \frac{x}{f(x)}\, f'(x),$$

da cui, facendo i conti otteniamo

$$c_x = -x\frac{18x+9}{9x^2+9x+2}.$$

Poichè per $x > 0$,

$$|c_x| = \frac{18x^2+9x}{9x^2+9x+2} < 2,$$

il problema è ben condizionato per $x > 0$, e $|\varepsilon_{\text{in}}| < 2u$.

b) Per la stabilità occorre analizzare l'errore algoritmico. Facendo il grafo otteniamo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{alg}} &= \varepsilon_6 + \frac{1}{(3x+1)f(x)}\left(\varepsilon_4 - 1\left(\varepsilon_2 + \frac{3x}{3x+1}\varepsilon_1\right)\right) - \\ &- \frac{1}{(3x+2)f(x)}\left(\varepsilon_5 - 1\left(\varepsilon_3 + \frac{3x}{3x+2}\varepsilon_1\right)\right), \end{aligned}$$

dove ε_i sono errori locali delle operazioni. Passando ai moduli, e maggiorando ogni errore locale con la precisione di macchina, otteniamo

$$\varepsilon_{\text{alg}} < u\left(1 + 2(3x+2) + 2(3x+1) + \frac{9x+18x^2}{9x^2+9x+2}\right) < u(12x+9),$$

che è illimitato per $x \to \infty$. Si noti che l'instabilità è dovuta a cancellazione numerica. Infatti per x grande $1/(3x+1)$ e $1/(3x+2)$ risultano molto vicini tra loro.

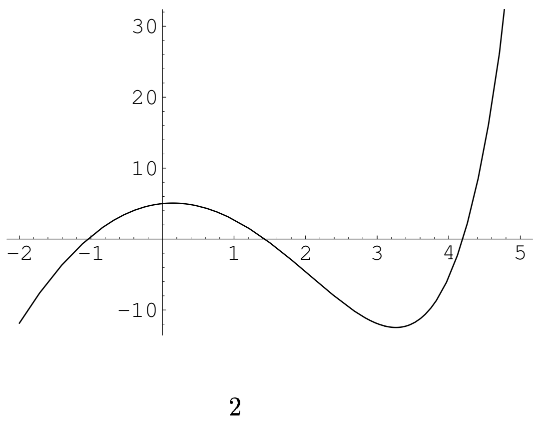
c) Se riscriviamo $f(x)$ come

$$f(x) = \frac{1}{(3x+1)(3x+2)},$$

non abbiamo più cancellazione numerica e l'errore algoritmico risulta maggiorabile con $6u$.

Esercizio 2

a) Dal grafico di $f(x)$



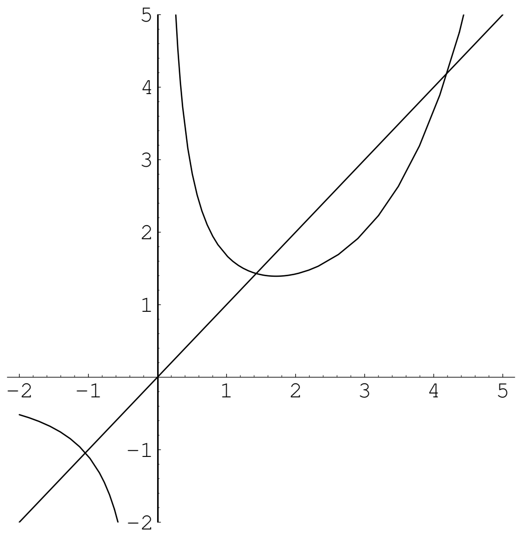
risulta che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali α, β e γ, con $-2 < \alpha < -1$, $1 < \beta < 2$ e $4 < \gamma < 5$.

b) La funzione $f(x)$ ha un punto di massimo M con $0 < M < 1$, un punto di minimo m con $3 < m < 4$ e un punto di flesso F con $2 < F < 3$. Quindi il metodo delle tangenti converge

1. ad α, se $x_0 < M$ (con successione $\{x_i\}$ crescente per $i \geq 0$ se $x_0 < \alpha$ e per $i \geq 1$ se $\alpha < x_0 < M$);
2. a β, se $\beta < x_0 < F$ (con successione $\{x_i\}$ decrescente); inoltre esiste un intorno sinistro di β di convergenza locale;
3. a γ, se $x_0 > m$ (con successione $\{x_i\}$ decrescente per $i \geq 0$ se $x_0 > \gamma$ e per $i \geq 1$ se $m < x_0 < \gamma$).

L'ordine di convergenza è in ogni caso 2.

c) Dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = g(x)$



risulta evidente che il metodo iterativo indicato è localmente convergente a β ma non a γ. Per confermare analiticamente questo fatto, notiamo che

$$g'(x) = \frac{e^x(x-1)-4}{4x^2}, \quad g'(\beta) = \frac{e^\beta(\beta-1)-4}{4\beta^2}, \quad g'(\gamma) = \frac{e^\gamma(\gamma-1)-4}{4\gamma^2},$$

e che $\quad e^\beta = 4\beta^2 - 4 \quad$ e $\quad e^\gamma = 4\gamma^2 - 4$. Quindi

$$g'(\beta) = \beta - 1 - \frac{1}{\beta}, \quad g'(\gamma) = \gamma - 1 - \frac{1}{\gamma}.$$

La funzione $h(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x}$ è tale che $|h(x)| < 1$ solo per $1 < x < 1+\sqrt{2}$. Ne segue che $|g'(\beta)| < 1$ e $|g'(\gamma)| > 1$. Quindi vi è convergenza locale a β ma non a γ. Inoltre si vede dal grafico che il metodo converge a β per ogni x_0 con $1 < x_0 < \gamma$ e ha ordine 1.