CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

18/6/2003

Esercizio 1 Per studiare il condizionamento del calcolo di $f(x)$ occorre esaminare l'errore inerente che è dato da

$$\varepsilon_{\text{in}} = \frac{-2x\sin x\cos x}{\cos^2(x)-\sin^2(\,x)}\,\varepsilon_x = -x\tan 2x\,\varepsilon_x.$$

Osserviamo che per $0 \le x \le \pi/2$ la funzione $\tan 2x$ non è superiormente limitata nell'intorno di $\pi/4$. Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è malcondizionato solo nell'intorno di $\pi/4$.

La stabilità può essere studiata valutando l'errore algoritmico, che risulta

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \varepsilon_6 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_5 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1) + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,(\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2)\right),$$

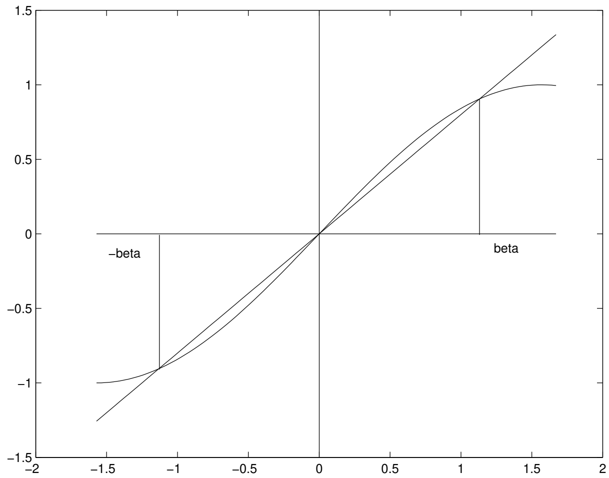
dove ε_i sono errori locali. Passando ai moduli, e sapendo che $|\varepsilon_i| \le u$, abbiamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{alg}}| &\le u\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\sin^2 x + 3\cos^2 x}{|\cos^2 x - \sin^2 x|}\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}u\left(1 + \frac{1}{|\cos 2x|}\right). \end{aligned}$$

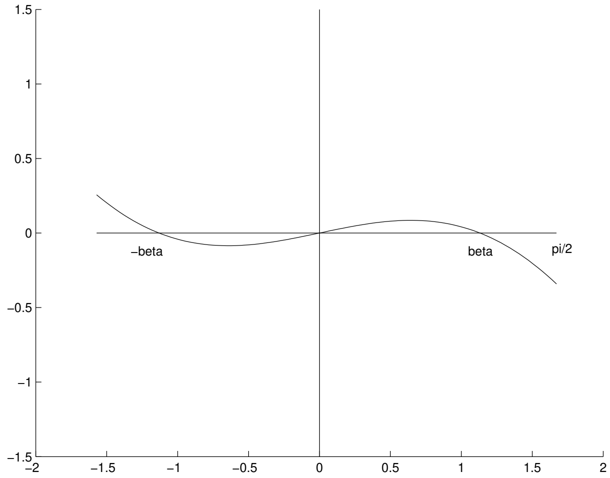
L'errore algoritmico non è limitato nell'intorno di $\pi/4$, quindi l'algoritmo non è stabile solo per $x \to \pi/4$.

Esercizio 2

a) Dal grafico risulta che vi sono soluzioni reali non nulle nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, se $2/\pi \le k < 1$.

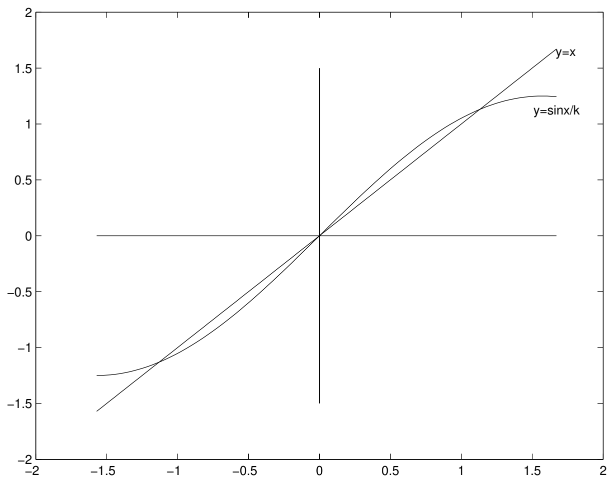


b) Per $2/\pi < k < 1$ il grafico di $f(x)$ risulta



Poichè $f'(x) = \cos x - k$ e $f''(x) = -\sin x$, risulta $f''(x) < 0$ per $x \in (0, \pi/2)$. Quindi il metodo delle tangenti converge a β per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in (\beta, \pi/2]$ e ha ordine 2.

c) Il grafico di $y = g(x)$ della retta $y = x$ risultano



Risulta evidente che per ogni $x_0 \in (0, \pi/2]$, il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, con $g(x) = \sin x/k$, produce una successione monotona convergente (crescente se $x_0 < \beta$, decrescente se $x_0 > \beta$).

Esercizio 3

a) Per $n = 5$, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Si fa la congettura che per n qualsiasi $B = A^{-1}$ abbia gli elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 2^{j-i-1} & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verifichiamo che $C = AB = I$.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= b_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} b_{kj}. \end{aligned}$$

Se $i > j$ è $b_{ij} = 0$ e $b_{kj} = 0$ per $k = i+1, \ldots, n$. Quindi $c_{ij} = 0$. Se $i = j$ è $b_{ii} = 1$ e $b_{kj} = 0$ per $k = i+1, \ldots, n$, quindi $c_{ii} = 1$. Se $i < j$ è

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 2^{j-i-1} - \sum_{k=i+1}^{n} b_{kj} = 2^{j-i-1} - \sum_{k=i+1}^{n} 2^{j-i-1} \\ &= 2^{j-i-1} - 2^{-1}(2^{j-i-1} + \cdots + 1) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $C = I$ e l'inversa di A è stata trovata correttamente.

c) Risulta $||A||_\infty = n$, 2

$$||A^{-1}||_\infty = 1 + \sum_{j=2}^{n} 2^{j-2} = 2^{n-1},$$

quindi $\mu_\infty(A) = n2^{n-1}$.

Esercizio 4

a) Si applica il metodo dei trapezi nei nodi $z_0 = 0, z_1 = 1/3, z_2 = 2/3, z_3 = 1$. Quindi

$$S = \frac{1}{6}\left[f(0) + 2f(\frac{1}{3}) + 2f(\frac{2}{3}) + f(1)\right] = \frac{5}{18}.$$

b) Poichè $I = \int_0^1 x^3\ dx = 1/4$, si ha

$$|S - I| = \frac{1}{36},$$

mentre il resto risulta

$$r = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} M_2 = -\frac{M_2}{108},$$

dove $M_2 \geq \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$. Si pone $M_2 = 6$, per cui $|r| \leq \frac{1}{18}$.