CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

17/1/2003

**Esercizio 1** Per studiare il condizionamento del calcolo di $f(x)$ occorre esaminare l'errore inerente che è dato da

$$\varepsilon_{\text{in}} = \frac{\alpha x}{\sin(\alpha x)} \cos(\alpha x)\, \varepsilon_x.$$

Osserviamo che il denominatore si annulla per $\alpha x = k\pi$ con $k$ intero. Per $x \to 0$ abbiamo $\dfrac{\alpha x}{\sin(\alpha x)} \to 1$ e quindi $|\varepsilon_{\text{in}}|$ è limitato ed il problema è ben condizionato. Il problema è invece mal condizionato per $x = k\pi/\alpha$ con $k \neq 0$.

La stabilità può essere studiata valutando l'errore algoritmico, che risulta

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \varepsilon_2 + \frac{\alpha x}{\sin(\alpha x)} \cos(\alpha x)\varepsilon_1,$$

dove $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$ sono errori locali. Passando ai moduli, e sapendo che $|\varepsilon_i| \leq u$, per $i = 1, 2$, abbiamo

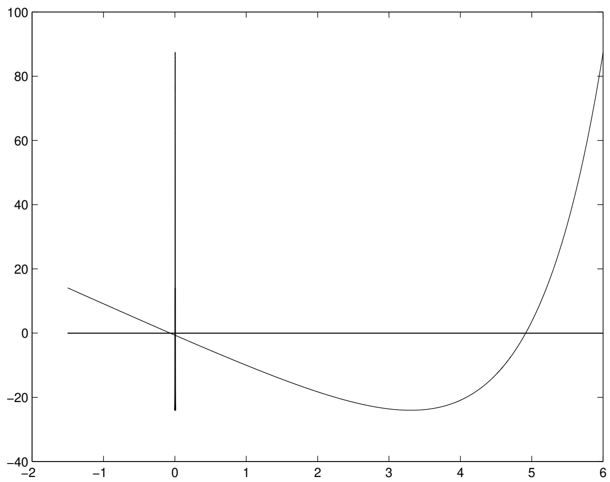
$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq u \left(1 + \left|\frac{\alpha x}{\sin(\alpha x)} \cos(\alpha x)\right|\right).$$

Per $x \to 0$ il calcolo di $f(x)$ risulta stabile mentre è instabile per $x \to k\pi/\alpha$ con $k \neq 0$.

**Esercizio 2**

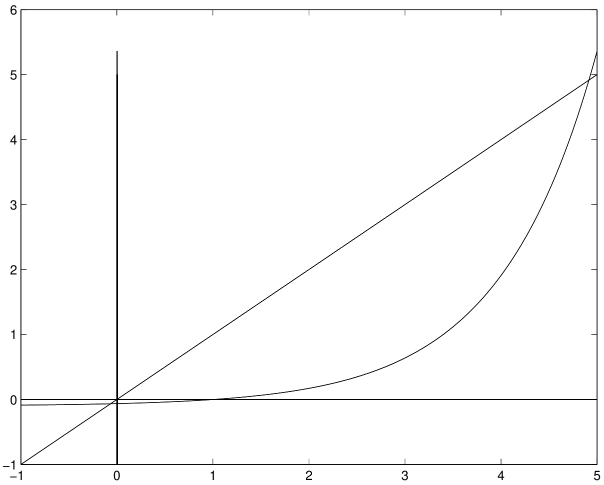
a) Con la separazione grafica delle funzioni $e^{x-1}$ e $10x + 1$ si nota che esistono due soluzioni reali: $\alpha \in [-1/2, 0]$ e $\beta \in [4, 5]$.

b) La funzione $f(x)$ ha un solo punto di minimo locale infatti $f'(x) = e^{x-1} - 10$ e quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1 + \log(10)$. $f''(x) = e^{x-1}$ è sempre positiva. Il grafico della funzione risulta quindi




Per il teorema di convergenza in grande abbiamo convergenza monotona ad $\alpha$ per ogni $x_0 < \alpha$ e convergenza, sempre monotona, a $\beta$ per ogni $x_0 > \beta$. In realtà la convergenza a $\alpha$ è assicurata partendo da un qualsiasi $x_0 < 1+\log(10)$, mentre partendo da $x_0 > 1+\log(10)$ abbiamo convergeza a $\beta$. Poichè le soluzioni hanno molteplicità uno e $f''(x) \neq 0$ per ogni $x$, l'ordine di convergenza è esattamente 2.

c) Il grafico di $y = g(x)$ della retta $y = x$ risultano




Per esaminare la convergenza del metodo occorre analizzare il comportamento di $g'(x)$. $g'(x) = \frac{1}{10}e^{x-1}$ che risulta sempre positiva. In particolare $g'(x) < 1$ per $x < 1 + \log(10)$. Osserviamo che $\beta$ non appartiene all'intervallo in cui la $|g'(x)| < 1$. Infatti $|g'(\beta)| = |\beta + \frac{1}{10}| \geq |4 + \frac{1}{10}| > 1$, quindi, possiamo concludere che non abbiamo convergenza locale alla soluzione $\beta$. Per la soluzione $\alpha$ abbiamo invece convergenza locale partendo da un qualsiasi $x_0 < 1 + \log(10)$. In realtà, dal grafico, si vede che la convergenza ad $\alpha$ è garantita partendo da un qualsiasi $x_0 < \beta$. L'ordine del metodo è 1.

**Esercizio 3**

a) Il polinomio caratteristico di $A$ risulta

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 59\lambda + 45.$$

Poiché la radice $\lambda = 1$ è nota, possiamo trovare le altre due dividendo $p(\lambda)$ per $\lambda - 1$. Il polinomio quoziente risulta $-\lambda^2 + 14\lambda - 45$ che ha come radici $\lambda = 5$ e $\lambda = 9$.

b) Un metodo iterativo è convergente se e solo se $\rho(P) < 1$. Nel nostro caso $P = I - \frac{1}{m}A$, e quindi i suoi autovalori possono essere determinati a partire da quelli di $A$. In particolare gli autovalori di $P$ risultano $1 - 1/m, 1 - 5/m$ e $1 - 9/m$. Condizione necessaria e sufficiente di convergenza è

$$\rho(p) = \max\left\{|1 - \frac{1}{m}|, |1 - \frac{5}{m}|, |1 - \frac{9}{m}|\right\} < 1.$$

Questo è verificato per $m > 9/2$.

c) * Il raggio spettrale è minimo per

$$1 - \frac{1}{m} = -(1 - \frac{9}{m})$$

cioè per $m = 5$.

**Esercizio 4** Il resto della formula dei trapezi risulta

$$R_2^{(N)} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f"(\xi).$$

$f'(x) = 2x\cos(x^2)$ e $f"(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$. Osserviamo che $|f"(x)|$ è limitata in $[0, 1]$, ed in particolare $|f"(x)| \leq 2$. Quindi

$$|R_2^{(N)}| \leq \frac{1}{12N^2}2 = \frac{1}{6N^2},$$

Imponendo che la maggiorazione del resto sia minore di $10^{-4}$ otteniamo $N \geq 41$.