CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

16/9/2003

Esercizio 1 In $\mathcal{F}(2,3,m,M)$, $\tilde{x} = 0.0101$; tale valore corrisponde al numero razionale 5/16. Calcolando in aritmetica esatta s, otterremmo il valore $s = 15/8$. Analizziamo adesso l'errore algoritmico che si commette applicando i due algoritmi.

a) Il calcolo di $z = (\tilde{x}+\tilde{x})+\tilde{x}$ eseguito in $\mathcal{F}(2,3,m,M)$ produce il valore $\tilde{z} = (0.111)_2$ corrispondente a $\tilde{z} = 7/8$. Da cui otteniamo $\tilde{s}_1 = \tilde{z}+\tilde{z} = (1.11)_2$ corrispondente a $\tilde{s}_1 = 11/8$. L'errore commesso con questo primo metodo è allora dato da

$$\varepsilon_1^{(\mathrm{alg})} = \frac{s-\tilde{s}_1}{s} = \frac{15/8 - 11/8}{15/8} = \frac{4}{15}.$$

b) Con il secondo algoritmo abbiamo, $\tilde{t}_2 = (0.1010)_2 = 5/8$, $\tilde{t}_3 = (0.111)_2 = 7/8$, $\tilde{t}_4 = (1.00)_2 = 1$, $\tilde{t}_5 = (1.01)_2 = 5/4$, fino ad ottenere $\tilde{s}_2 = \tilde{t}_6 = (1.10)_2 = 3/2$. L'errore commesso con il secondo metodo risulta

$$\varepsilon_2^{(\mathrm{alg})} = \frac{s-\tilde{s}_2}{s} = \frac{15/8 - 3/2}{15/8} = \frac{1}{5}.$$

L'errore algoritmico teorico ottenuto con il grafo per il primo algoritmo risulta

$$\eta_1^{(\mathrm{alg})} = \varepsilon_3 + \frac{2z}{s_1}\left(\varepsilon_2 + \frac{2\tilde{x}}{z}\varepsilon_1\right) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_1.$$

Passando ai moduli e maggiorando gli errori locali con la precisione di macchina abbiamo

$$|\eta_1^{(\mathrm{alg})}| < \frac{8}{3}u = \frac{2}{3}.$$

Come ci si attende è $|\varepsilon_1^{(\ \mathrm{alg})}| = \frac{4}{15} < \frac{2}{3}$.

L'errore algoritmico teorico ottenuto con il grafo per il secondo algoritmo risulta

$$\eta_2^{(\mathrm{alg})} = \eta_5 + \frac{t_5}{s_2}\left(\eta_4 + \frac{t_4}{t_5}\left(\eta_3 + \frac{t_3}{t_4}\left(\eta_2 + \frac{t_2}{t_3}\eta_1\right)\right)\right).$$

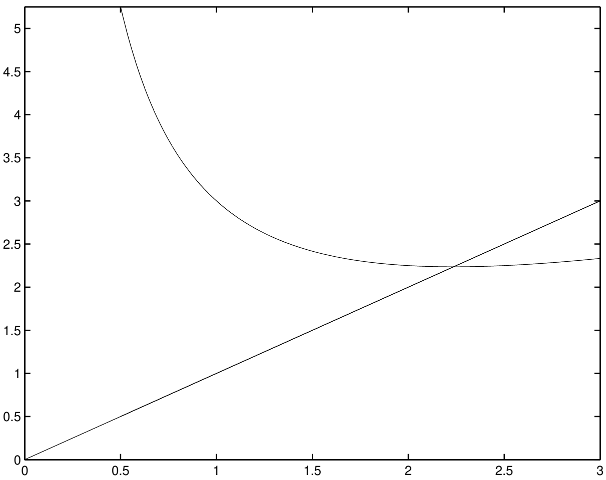
Passando ai moduli e maggiorando gli errori locali con la precisione di macchina abbiamo

$$|\eta_2^{(\mathrm{alg})}| < u\left(1 + \frac{1}{s_2}\left(t_2+t_3+t_4+t_5\right)\right) = \frac{20}{6}u = \frac{5}{6}.$$

Come ci si attende è $|\varepsilon_2^{(\mathrm{alg})}| = \frac{1}{5} < \frac{5}{6}$.

Esercizio 2

Il primo metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ con $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$, se converge converge all'unico punto fisso positivo di $x = g(x)$ che è $\alpha = \sqrt{5}$. Dal grafico

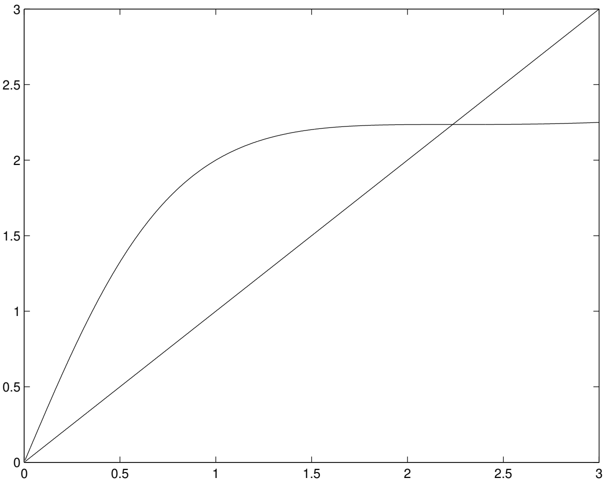


risulta che il metodo è localmente convergente ad α. Poiché $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$, il metodo è del secondo ordine. Inoltre per ogni $x_0 > \alpha$ risulta $\alpha < x_1 < x_0$, per cui si ottiene una successione monotona convergente ad α per ogni $x_0 > \alpha$. Per $0 < x_0 < \alpha$ si ha $x_1 > \alpha$, e da questo punto in poi si ricade nel caso precedente.

Il secondo metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ con

$$g(x) = \frac{15x + x^3}{3x^2 + 5},$$

se convergente, converge anch'esso ad $\alpha = \sqrt{5}$. Altri punti fissi sono $x = 0$ ed $x = -\sqrt{5}$. Dal grafico



risulta che il metodo è localmente convergente ad α. Poiché $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ e $g'''(\alpha) \neq 0$, il metodo è del terzo ordine. Inoltre per ogni $x_0 > 0$ e $x_0 \neq \alpha$ si ottiene una successione monotona convergente ad α da destra se $x_0 > \alpha$ e da sinistra se $x_0 < \alpha$.

Esercizio 3

a) Per $n = 3$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1. \end{bmatrix}$$

da cui la matrice di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0. \end{bmatrix}$$

Affinché il metodo di Jacobi sia convergente deve essere soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente, ovvero $\rho(J) < 1$. Il polinomio caratteristico di J risulta $p(\lambda) = (\lambda-\alpha)(-\lambda^2-\alpha\lambda+2\alpha^2)$ le cui radici sono $\lambda_{1,2} = \alpha$ e $\lambda_3 = -2\alpha$. Quindi il metodo è convergente se $|\alpha| < 1/2$. Si noti che in questo caso, la condizione sufficiente per la convergenza, ovvero la predominanza diagonale di A risulta anche essere una condizione necessaria.

b) Nel caso generale risulta $A = (1-\alpha)I + \alpha\mathbf{e}\mathbf{e}^T$, da cui $D = I$ ed $B + C = -\alpha\mathbf{e}\mathbf{e}^T + \alpha I$, per cui $J = \alpha(I - \mathbf{e}\mathbf{e}^T)$. Gli autovalori di J hanno allora la forma

$$\lambda(J) = \alpha(1 - \lambda(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)).$$

Poiché la diade $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ ha come autovalori 0 ed n, gli autovalori di J sono α e $(1-n)\alpha$. Da cui abbiamo che il metodo di Jacobi converge se e solo se $|\alpha| < 1/(n-1)$.

Esercizio 4 Per ottenere la formula composta si divide l'intervallo $[a, b]$ in N parti per mezzo dei punti

$$x_i = a + ih, \quad \text{per } i = 0, \dots, N, \quad \text{con } h = \frac{b-a}{N}.$$

L'integrale su ogni intervallino $[x_i, x_{i+1}]$ viene approssimato con le formula assegnata, cioè con $(x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$. Perciò la formula composta risulta

$$I^{(N)} = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i + \frac{h}{2}). \tag{1}$$

Infatti,

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{a + ih + a + (i+1)h}{2} = a + ih + \frac{h}{2} = x_i + \frac{h}{2}.$$

Nel caso $f(x) = x^2$ e $a = 5, b = 6$, abbiamo

$$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = f\left(5 + \frac{1}{2N} + \frac{i}{N}\right) = \left(5 + \frac{1}{2N} + \frac{i}{N}\right)^2.$$

Sostituendo in (1) otteniamo

$$I^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_1} \left(5 + \frac{1}{2N}\right)^2 + \frac{i^2}{N^2} + \left(\frac{10N+1}{N^2}\right) i = 30 + \frac{1}{3} - \frac{1}{12N^2}.$$

Osserviamo che l'integrale esatto risulta $\int_5^6 x^2\, dx = 91/3 = 30 + \frac{1}{3}$, quindi l'errore relativo per ogni N è dato da

$$|\varepsilon^{(N)}| = \left|\frac{I - I^{(N)}}{I}\right| = \frac{1}{364N^2}.$$

Nel caso particolare si ha per $N = 10$, si ha

$$I^{(10)} = 30 + \frac{1}{3} - \frac{1}{1200},$$

e

$$|\varepsilon^{(10)}| = \frac{1}{36400}.$$

Per $N = 100$ risulta

$$I^{(100)} = 30 + \frac{1}{3} - \frac{1}{120000},$$

e

$$|\varepsilon^{(100)}| = \frac{1}{364 * 10000}.$$