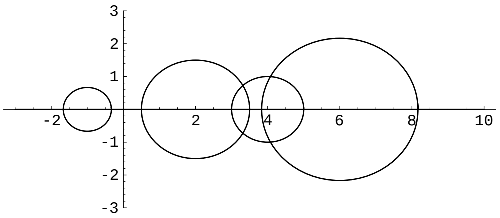
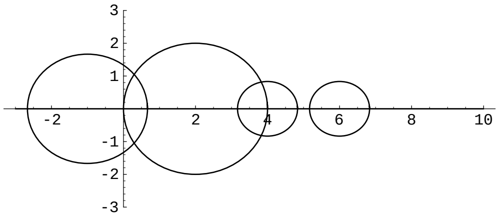
CORREZIONE DELLA SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

17/12/2003

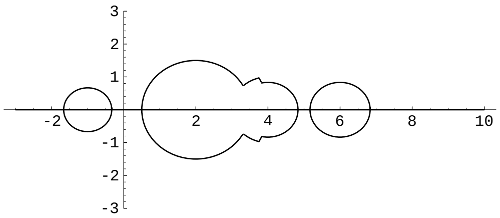
Esercizio 1. L'unione U_1 dei cerchi di Gershgorin per righe è



L'unione U_2 dei cerchi di Gershgorin per colonne è



L'intersezione $U_3 = U_1 \bigcap U_2$ è



a) I due cerchi di centro -1 e 6 risultano disgiunti dagli altri, quindi contengono ciascuno un solo autovalore, che risulta essere reale. Indicati con λ_1 e λ_4 questi due autovalori, si ha $-5/3 \leq \lambda_1 \leq -1/3$ e $31/6 \leq \lambda_4 \leq 41/6$. Pertanto gli autovalori non reali possono essere al più 2.

b) È $\rho(A) = \lambda_4$, quindi $31/6 \leq \rho(A) \leq 41/6$.

c) No, perché l'origine del piano complesso non appartiene a U_3, quindi A non ha autovalori nulli.

d) È $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \text{tr } A = 11.$

Esercizio 2. a) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di J sono i tre numeri complessi λ_1, λ_2, λ_3 tali che $\lambda_i^3 = 1/4$, $i = 1, 2, 3$. Quindi $|\lambda_i|^3 = 1/4$ e $|\lambda_i| = 1/\sqrt[3]{4}$. Pertanto $\rho(J) = 1/\sqrt[3]{4}$ e il metodo di Jacobi converge.

b) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\rho(G) = 1/4$ e il metodo di Gauss-Seidel converge.

c) Il metodo di Gauss-Seidel risulta più veloce di quello di Jacobi.

d) Le iterate di Gauss-Seidel si calcolano con le relazioni

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 2 + x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 3/2 - x_1^{(k)}/2 \\ x_3^{(k)} = -1/2 - x_2^{(k)}/2 \end{cases}$$

per cui si ha

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 7/8 \\ -15/16 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si ha $f(x_0) = -1$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$.

a) È $p(x) = -\dfrac{2}{3}\, x^2 + 3x - \dfrac{7}{3}$.

b) Posto $\pi_2(x) = (x - 1/2)(x-1)(x-2)$, si ha

$$r(x) = \pi_2(x)\, \frac{f'''(\xi)}{3!}, \qquad \text{con} \quad \xi \in (1/2, 2).$$

Poiché $f'''(x) = \log_2 e \dfrac{2}{x^3}$, si ha

$$\max_{x\in(1/2,2)} |f'''(x)| = f'''(1/2) = 16 \log_2 e \sim 23.08$$

e

$$\max_{x\in(1/2,2)} |\pi_2(x)| = -\pi_2\Big(\frac{7+\sqrt{7}}{6}\Big) \sim 0.26.$$

Quindi $|r(x)| < 1.02$.

c) È

$$r(x) = f(x) - p(x) = \log_2 x + \frac{2}{3}\, x^2 - 3x + \frac{7}{3},$$

$$r'(x) = \frac{4}{3}\, x - 3 + \frac{1}{x} \log_2 e$$

e $r'(x) = 0$ nei punti $x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{81 - 48 \log_2 e}}{8}$ e $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{81 - 48 \log_2 e}}{8}$. Quindi

$$\max_{x\in[x_0,x_2]} |r(x)| = -r(x_2) \sim 0.083.$$