Cognome Nome Matricola Firma

Corso di laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

16/9/2003

Esercizio 1 Si consideri in $\mathcal{F}(2,3,m,M)$ la rappresentazione $\tilde{x}$ del numero $x = 1/3$ e si calcoli $s = \sum_{i=1}^{6} \tilde{x}$ secondo i due diversi algoritmi:

a) $z = \tilde{x} + \tilde{x} + \tilde{x}, \qquad s = z + z,$

b) $t_1 = \tilde{x}, \qquad t_i = t_{i-1} + \tilde{x}$, per $i = 1, \ldots, 6, \qquad s = t_6,$

operando con troncamento dei risultati intermedi. Confrontare i risultati ottenuti con il valore esatto e gli errori effettivi con le maggiorazioni degli errori ottenuti con i grafi.

Esercizio 2 Verificare che i due metodi iterativi

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{5}{x_i}\right), \qquad y_{i+1} = \frac{15y_i + y_i^3}{3y_i^2 + 5},$$

approssimano entrambi la $\sqrt{5}$. Studiare la convergenza e gli ordini.

Esercizio 3 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, in cui la matrice A di ordine n ha gli elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ \alpha & \text{se } i \neq j, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

a) Per $n = 3$ si costruisca la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e si dica per quali valori di α il metodo converge.

b*) Per n generico, dopo aver verificato che la matrice di iterazione di Jacobi ha la forma $J = \alpha\left(I - \mathbf{e}\mathbf{e}^T\right)$, dove $\mathbf{e}$ è il vettore di tutti 1, si calcolino gli autovalori di J sfruttando gli autovalori della diade. Per quali valori di α il metodo converge?

Esercizio 4 Una formula per approssimare

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

è $I \approx f(1/2)$.

Scrivere la corrispondente formula generalizzata per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$, applicarla alla funzione $f(x) = x^2$ con $a = 5$ e $b = 6$, suddividendo l'intervallo $[a,b]$ in N intervalli con $N = 10$ e $N = 100$. Dire quale è l'errore nei due casi. Tenere conto della formula $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.