Corso di laurea in Informatica

SOLUZIONE DELLA PRIMA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO - COMPITO A

6/11/2002

Esercizio 1

a) Per studiare il condizionamento del calcolo di $f(x)$ occorre studiare l'errore inerente, ovvero

$$\varepsilon_{\text{in}} = c_x\,\varepsilon_x = x\,\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\,\varepsilon_x.$$

Poiché $|\cos x + \sin x| \leq \cos(\pi/8) + \sin(\pi/8) \leq 3/2$, e $|\sin x - \cos x| \geq 1/2$ otteniamo

$$|\varepsilon_{\text{in}}| \leq 3|x|\,|\varepsilon_x| \leq 3\frac{\pi}{8}u.$$

b) Dal grafo, l'errore algoritmico risulta

$$\varepsilon_{\text{alg}} = \varepsilon_3 + \frac{x^2}{2\,f(x)}\,\varepsilon_2 + \frac{-1+x}{f(x)}\,\varepsilon_1.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare dei moduli ed osservando che $|\varepsilon_i| \leq u$ abbiamo

$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq u\left(1 + \frac{x^2}{2\,|f(x)|} + \frac{|x-1|}{|f(x)|}\right).$$

Per $x > 1$ risulta $|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq 2u$ e quindi l'algoritmo è stabile per questi valori. L'algoritmo risulta invece instabile per le radici di $f(x) = 0$ ovvero per $x \to -1 \pm \sqrt{3}$. Si noti che nell'intervallo I risulta $|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq 3u$.

* c) L'errore analitico può essere studiato ricorrendo al resto di Taylor:

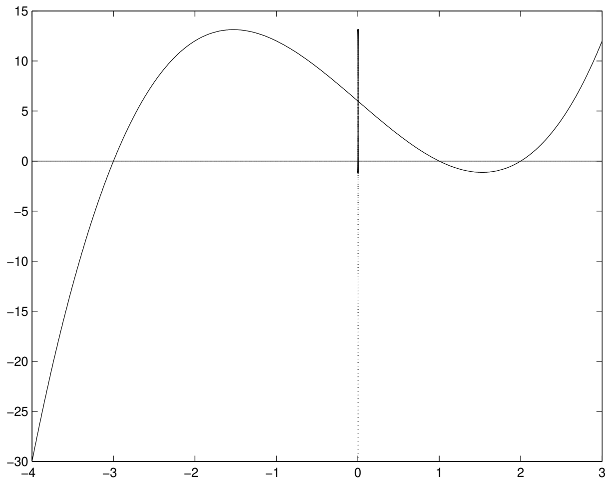
$$\sin x - \cos x = -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}(\cos\xi - \sin\xi),$$

con ξ compreso tra 0 e x. Abbiamo allora:

$$|\varepsilon_{\text{an}}| = \frac{|x^3/6(\cos\xi - \sin\xi)|}{|\sin x - \cos x|} \leq \frac{\pi^3/(8^3 * 6)\,|\cos(-\pi/8) - \sin(-\pi/8)|}{1/2} \leq \frac{\pi^3}{2^{10}}.$$

Esercizio 2

a) Le soluzioni possono essere determinate esplicitamente e risultano $\alpha = -3, \beta = 1$ e $\gamma = 2$. La funzione ha massimo relativo in $M = -\sqrt{7/3}$ e minimo relativo in $m = \sqrt{7/3}$ e $f(M) > 0$, $f(m) < 0$. Il flesso è in 0. Il grafico risulta

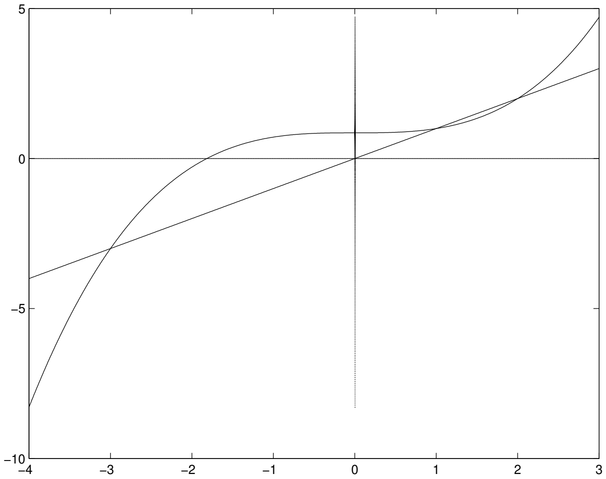


b) Il metodo delle tangenti risulta convergente a α per ogni $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{7/3})$. Infatti per $x_0 \in (-\infty, \alpha)$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in grande. Per $x_0 \in (\alpha, -\sqrt{7/3})$ dal grafico otteniamo che $x_1 \leq \alpha$ e quindi la convergenza è garantita per il teorema precedente. L'ordine di convergenza è 2 in quanto $f"(\alpha) \neq 0$.

Il metodo delle tangenti risulta convergente a β per ogni $x_0 \in [0, \beta]$ in quanto sono soddisfatte le ipotesi del teorema di convergenza in grande. L'ordine di convergenza è 2 in quanto $f"(\beta) \neq 0$.

Il metodo delle tangenti risulta convergente ad γ per ogni $x_0 \in (\sqrt{7/3}, \infty)$. Infatti per $x_0 \in (\gamma, \infty)$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in grande. Per $x_0 \in (\sqrt{7/3}, \gamma)$ dal grafico otteniamo che $x_1 \geq \gamma$ e quindi la convergenza è garantita per il teorema precedente. L'ordine di convergenza è 2 in quanto $f"(\gamma) \neq 0$.

c) Il grafico di $g(x)$ intersecato con la retta $y = x$ risulta



Poiché le radici sono note possiamo vedere se c'e' convergenza locale calcolando il valore che assume la derivata prima nei punti fissi.

$$g'(x) = \frac{3}{7}x^2.$$

Osserviamo che $g'(\alpha)$ e $g'(\gamma)$ risultano maggiori di 1, quindi non abbiamo convergenza locale del metodo alle radici α ed γ. Abbiamo invece convergenza locale a $\beta = 1$ in quanto $g'(\beta) = 3/7 < 1$. Graficamente si osserva che otteniamo una successione convergente a β partendo da un qualsiasi $x_0 \in (\alpha, \gamma)$. Poiché $g'(\beta) \neq 0$ il metodo è del primo ordine.

Esercizio 3

a) Il metodo delle tangenti applicato all'equazione $x^2 - 3 = 0$ a partire dal punto $x_0 = 4$ risulta convergente perché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di convergenza in grande.

b) I valori che si ottengono operando in $\mathcal{F}(10, 2, m, M)$ risultano $\tilde{x}_1 = 2.4, \tilde{x}_2 = 1.8, \tilde{x}_3 = 1.7, \tilde{x}_4 = 1.7$, quindi la successione si stabilizza sul valore 1.7 che risulta infatti la migliore approssimazione di $\sqrt(3)$ in $\mathcal{F}(10, 2, m, M)$.