Corso di laurea in Informatica

SOLUZIONE DELLA SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO - Corsi A-B-C

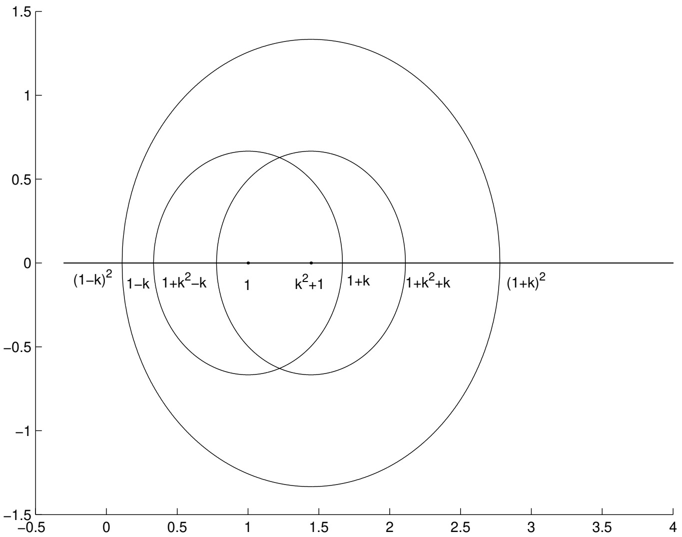
18/12/2002

Esercizio 1

a) La matrice A^TA risulta

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ k & k^2+1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & k^2+1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & k^2+1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k & k^2+1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice è simmetrica ha autovalori reali ed i cerchi risultano essere: 1 cerchio con centro 1 e raggio k. 3 cerchi con centro $1+k^2$ e raggio $2k$ e un cerchio di centro $1+k^2$ e raggio k.



Poiché gli autovalori appartengono all'unione dei cerchi di Gerschgorin e sono reali otteniamo:

$$(1-k)^2 \leq \lambda \leq (1+k)^2$$

b) $\mu_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2$. Dalle limitazioni del punto a) abbiamo

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \leq (1+k)$$

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(A^TA)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-k)^2}} = \frac{1}{1-k}.$$

Da cui abbiamo

$$\mu_2(A) \leq \frac{1+k}{1-k}.$$

Osserviamo che per $k \to 0$ il numero di condizionamento di A tende a 1 e quindi che per k piccoli il problema è ben condizionato mentre per $k \to 1$ il numero di condizionamento non è limitabile superiormente.

c) Osserviamo che

$$\prod_{i=1}^{5} \lambda_i = \det(A^T A)$$

Per la regola di Binet $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det^2(A)$, poiché A è triangolare superiore il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali che è 1. Quindi

$$\prod_{i=1}^{5} \lambda_i = 1.$$

d)

$$\lambda_1 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=2}^{5} \lambda_i} = \frac{1}{\prod_{i=2}^{5} \lambda_i} \geq \frac{1}{(1+k)^8}.$$

e) Per definizione abbiamo che

$$\mu_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_5}}{\sqrt{\lambda_1}} \leq (1+k)(1+k)^4 = (1+k)^5 < 2^5.$$

Esercizio 2

a) Per la matrice P risulta $p_1 = \|P\|_\infty = 5/4$. La matrice P^2 risulta

$$P^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix},$$

e quindi $p_2 = \|P^2\|_\infty = 13/16$.

b) Poiché per una qualsiasi norma matriciale vale $\rho(P) \leq \|P\|$, abbiamo $\rho(P) \leq p_1 = 5/4$ e $\rho(P^2) \leq p_2 = 13/16$.

c) Poiché gli autovalori di P^2 sono il quadrato degli autovalori di P abbiamo che

$$\rho(P^2) = \rho^2(P)$$

da cui otteniamo che

$$\rho(P) = \sqrt{\rho(P^2)} \leq \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4} < 1.$$

Poiché $\rho(P) < 1$ il metodo iterativo risulta convergente.

d) Il polinomio caratteristico di P risulta

$$\det(P - \lambda I) = -\lambda^3 = \frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda + \frac{5}{64},$$

che ha come radici $\lambda_1 = 1/4; \lambda_2 = 1/2 + i/4$ e $\lambda_3 = 1/2 - i/4$. Poiché tutti gli autovalori in modulo sono minori di 1 il metodo iterativo risulta convergente.

Esercizio 3

a) Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = 3x - 2$$

ed $r(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$.

b) In questo caso è equivalente studiare analiticamente la funzione $r(x)$ oppure utilizzare la formula del resto infatti $f^{(3)}(x) = 6$, e quindi dalla formula del resto otteniamo $r(x) = \pi(x)$. Osserviamo che $r'(x) = 0$ per $x = (4 \pm \sqrt{7})/3$ e

$$\left| r\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) \right| = \left| \frac{-20 - 14\sqrt{7}}{27} \right| \simeq 2.11, \quad \left| r\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \right| = \left| \frac{-20 + 14\sqrt{7}}{27} \right| \simeq 0.631,$$

da cui abbiamo $|r(x)| \leq |r((4+\sqrt{7})/3)| \simeq 2.11$ per $x \in [0, 3]$.