Cognome Nome Matricola Firma

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di **CALCOLO NUMERICO** - Corsi A-B-C

22/01/2002

Esercizio 1 Quanti sono gli interi positivi contenuti in $\mathcal{F}(2,3,5,4)$? Stessa domanda per $\mathcal{F}(2,24,128,127)$?

Esercizio 2 È assegnata l'equazione $x = x^2 + a$ ove a è un numero reale.
(a) Determinare per via grafica per quali valori di a l'equazione ha una soluzione $\gamma(a) \leq 0$.
(b) Dimostrare che per $-\frac{3}{4} < a \leq 0$ il metodo iterativo $x_{i+1} = x_i^2 + a$ risulta localmente convergente a $\gamma(a)$. Individuare anche l'ordine di convergenza al variare di a.

Esercizio 3 Individuare tutte le matrici $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ tali che risulti sia $\|Ax\|_1 = \|x\|_1$ sia $\|Ax\|_\infty = \|x\|_\infty$ per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ (suggerimento: se la condizione vale per ogni x vale in particolare per i due vettori canonici e la loro somma).

Esercizio 4 Sia P una matrice quadrata di ordine 10 avente tutti gli elementi di modulo minore o uguale a 1.
(a) Dimostrare che il metodo iterativo

$$x_{i+1} = \frac{1}{12} P x_i + q$$

risulta convergente.
(b) Sia $\hat{x} = \lim x_i$, sia x_0 assegnato e sia $e_i = \hat{x} - x_i$. Determinare un intero $\bar{k}$ tale che per $k \geq \bar{k}$ risulti $\|e_k\|_1 \leq \frac{1}{2}\|e_0\|_1$.

Esercizio 5 Sono assegnati i punti $(x_0 - \alpha, y_1)$, (x_0, y_2), $(x_0 + \alpha, y_3)$ con α numero reale diverso da zero. Dimostrare che la retta di miglior approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati è parallela a quella passante per $(x_0 - \alpha, y_1)$ e $(x_0 + \alpha, y_3)$.