Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
14 Gennaio 2002

Esercizio 1

Risulta $y = 1/b$ e $x = 1/a(1 - 1/b)$.

(a) Si trova

$$\epsilon_{in,\,y} = -\epsilon_b \qquad \text{e} \qquad \epsilon_{in,\,x} = -\epsilon_a + \frac{1}{b-1}\epsilon_b.$$

Quindi il problema del calcolo di x risulta malcondizionato per b vicino a 1.

(b) Si trova

$$\epsilon_{alg,\,y} = \epsilon_1 \qquad \text{e} \qquad \epsilon_{alg,\,x} = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \frac{1}{b-1}\epsilon_5,$$

ove $|\epsilon_i| \leq u$ per $i = 1, \ldots, 5$. Risulta che l'algoritmo è instabile se b è prossimo a 1.

(c) In questo caso e gli errori inerente ed algoritmico possono venire facilmente maggiorati. Inoltre, trattandosi della risoluzione di un sistema lineare l'errore analitico è nullo. Dunque

$$|\epsilon_{tot,\,y}| \leq 2u \qquad \text{e} \qquad |\epsilon_{tot,\,x}| \leq 6u.$$

Esercizio 2

(a) L'equazione ha per ogni valore di a una ed una sola soluzione che verrà indicata con $\alpha(a)$.

(b) Quando $a > -1$ risulta $\alpha(a) > 0$. La funzione di iterazione è $g(x) = e^{-x} + a$ e avendosi $g'(x) = -e^{-x}$ risulta $-1 < g'(\alpha(a)) < 0$. Questo implica la convergenza locale.

(c) Aiutandosi graficamente si trova che per ogni punto iniziale x_0 risulta $x_1 > 0$ e anche $x_2 > 0$ e risulta $0 < x_1 \leq \alpha$ oppure $0 < x_2 \leq \alpha$ comunque con $|\alpha(0) - x_2| \leq |\alpha(0) - x_1|$. Posto allora $\rho = |\alpha(0) - x_2|$ si può considerare l'intervallo $[\alpha(0) - \rho, \alpha(0) + \rho]$ in cui la derivata della funzione di interazione si mantiene in modulo minore di 1. Il teorema del punto fisso garantisce allora la convergenza della successione ad $\alpha(0)$.

Esercizio 3

Risulta $|\det A| = |\prod_{i=1}^n \lambda_i| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|$, ove i λ_i sono gli autovalori di A. Risulta per definizione di raggio spettrale $|\lambda_i| \leq \rho(A)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e dunque $|\det A| \leq \rho(A)^n$. Per un noto teorema risulta $\rho(A) \leq \|A\|$ da cui $\rho(A)^n \leq \|A\|^n$. Dunque $|\det A| \leq \|A\|^n$.

Esercizio 4

(a) Perchè questo garantisce l'invertibilità della matrice M, come nei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

(b) Risulta

$$\begin{aligned} \det P &= \det M^{-1}N = \det M^{-1} \det N = \frac{\det N}{\det M} \\ &= \frac{(-1/2)^n \det D}{(1/2)^n \det D} = (-1)^n. \end{aligned}$$

(c) Avendosi $|\det P| = 1$ il metodo non può essere convergente, in quanto $|\det P| < 1$ è condizione necessaria per la convergenza.

Esercizio 5

(a) Risulta

$$p(x) = 6\frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} + 2\frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} = x^2 - 3x + 2.$$

(b) Si osserva subito che a tutte le ordinate è stato aggiunto -5 e quindi a $p(x)$ si deve aggiungere il polinomio di interpolazione della costante -5. Allora il nuovo polinomio di interpolazione risulta $q(x) = p(x) - 5$.

(c) Il polinomio di interpolazione dei punti $(-1, 6+\alpha)$, $(2, 0+\alpha)$, $(3, 2+\alpha)$ risulta essere $u(x) = p(x) + \alpha$.