Soluzione della seconda prova intermedia di Calcolo Numerico
18 Dicembre 2001

Esercizio 1

(a) Il calcolo diretto mostra che $\|A\|_1 = 9 = \|A\|_\infty$. Alternativamente si può osservare che A è simmetrica e la norma uno ed infinito di una matrice simmetrica sono uguali.

(b) La matrice A è simmetrica e dalla teoria è noto che per le matrici simmetriche risulta

$$\mu_2(A) = \frac{\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovalore di } A\}}{\min\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovalore di } A\}}.$$

Utilizzando i cerchi di Gerschgorin si trova $\mu_2(A) \leq 9$.

(c) Il metodo di eliminazione di Gauss è applicabile ad A senza scambi di righe perchè A è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto. Si trova

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Risulta $\det A = \det A^{(5)} = 4^5 = 1024$.

(e) Il sistema $Ax = e_5$ risulta equivalente al sistema $A^{(5)}x = e_5$. Si trova

$$x = \begin{pmatrix} 1/64 \\ -1/32 \\ 1/16 \\ -1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) I due metodi risultano convergenti perchè la matrice A è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto per colonne.

(b) Risulta

$$J = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si trova $\rho(J) = \sqrt{3}/3$ e $\rho(G) = 1/3$. Avendosi $\rho(G) < \rho(J)$ il metodo di Gauss-Seidel converge più velocemente di quello di Jacobi. Si può notare che $\rho(G) = \rho^2(J)$ e dunque il tasso asintotico di convergenza del metodo di Gauss-Seidel risulta essere il doppio di quello del metodo di Jacobi.

(c) Per la matrice di iterazione P risulta

$$P = M^{-1}N = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det P = -2$ non è possibile che gli autovalori di P abbiano tutti modulo minore di 1 e quindi che il metodo risulti convergente.

Esercizio 3

(a) Risulta $f(0) = 1 = g(0)$, $f(1) = 0 = g(1)$, $f(2) = 1 = g(2)$ e quindi il polinomio di interpolazione è lo stesso per le due funzioni, ossia

$$p(x) = L_0(x) + L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = x^2 - 2x + 1.$$

(b) Risulta

$$r_f(x) = x(x-1)(x-2)\frac{\pi^3}{48}\cos\frac{\pi}{2}\xi \qquad \text{e} \qquad r_g(x) = x(x-1)(x-2)4(\xi-1).$$

In $[0,2]$ Si trova che $\max|x(x-1)(x-2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e quindi, sempre in $[0,2]$,

$$|r_f(x)| \le \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad |r_g(x)| \le \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

(c) Essendo $g(x)$ un polinomio di quarto grado, il polinimio di interpolazione di $g(x)$ su 5 nodi distinti coincide con $g(x)$. Ne segue che il resto è uguale a zero.

(d) Nell'intervallo $[0,2]$ la funzione $f(x)$ è indefinitamente derivabile e risulta $|f^{(n)}(x)| \le (\pi/2)^n$. Questo garantisce la convergenza della successione dei resti a zero.