Esperienze di programmazione Lezione 3

Gianna Del Corso <delcorso@di.unipi.it>

13 Marzo 2015

1 Immagini

Matlab rappresenta le immagini mediante una matrice A di interi di dimensione $p \times q$ associando all'elemento (i, j) di A un colore opportuno. Pi'ǔprecisamente se $a_{ij} = k$ allora il colore del pixel (i, j) è quello definito dalla k-esima riga della matrice detta **colormap**. La colormap è una matrice $nc \times 3$ con elemento tra 0 e 1 dove nc è il numero di colori che si vogliono usare e ciascuna riga rappresenta un colore attraverso la terna (r, g, b) che definisce la quatità di rosso, verde e blu.

Per default la colormap ha 64 colori, ma possiamo cambiare la mappa dei colori. Si provino i seguenti comandi:

```
>> A=zeros(64*5, 64*3);
>> for k=1:64, A(5*k-4:5*k, :)=k; end
>> image(A);
```

Cosa succede se cambiamo i colori con il comando `colormap(hot)`?

Se gli esimenti di A non sono interi ma numeri compresi tra 0 e 1, si deve usare il comando `imagesc(A)` per costruisce l'immagine scalando opportunamente gli elementi di A.

2 Frattali di Julia

Sia s un numero complesso fissato e si consideri la successione $\{z_n\}_n$ definita come

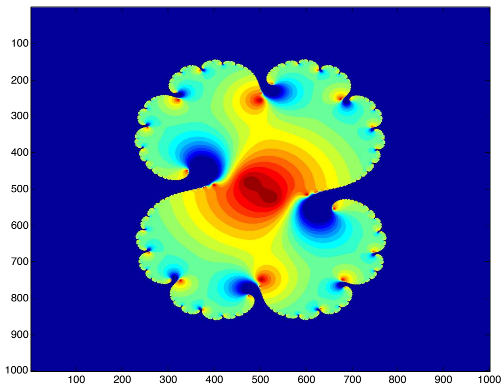
$$\begin{array}{l} z_1 \text{ numero complesso fissato in modo casuale} \\ z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{array} \tag{1}$$

Si vogliono disegnare i bacini di attrazione, cioè i punti per la quale la successione è convergente, al variare del punto iniziale z_1 nel rettangolo del piano complesso $[a, b] \times i[c, d]$.

Esercizio 1. Si scriva la funzione `J=julia(a, b, c, d, s, K)` che disegni i bacini di attrazione della successione al variare di z_1 nel rettangolo del piano complesso `[a, b] x i [c, d]`. I numeri `a, b, c, d` sono reali.

- Si suddividano gli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ in sottointervalli piccoli con il comando `linspace(inizio, fine, npunti)`.
- per ciascun punto `x(h)+i*y(k)` della griglia, si calcolino gli elementi della successione z_n per $n = 2, 3, \ldots, K$ ottenuti ponendo $z_1 =$ `x(h)+i *y(k)` (si interrompa il calcolo se $|z_n| > 10^{16}$ per evitare situazioni di overflow). Si definisca $J(h, k)$ come l'ultimo elemento della successione;
- Usando il comando `imagesc(-exp(abs(J)))` si visualizzi la figura

Che immagine si ottiene con il comando
`J=julia(-1.5, 1.5, -1.5, 1.5, .27334-0.00742i, 20)`? dovrebbe venire fuori qualcosa simile a questo:



si provi con altri valori di s.

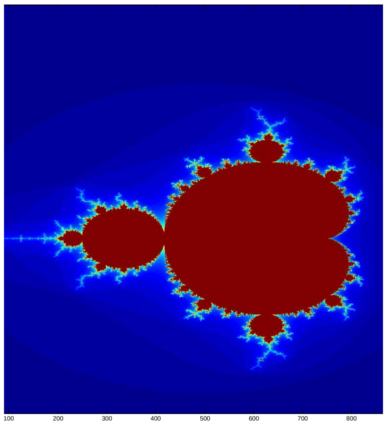
Esercizio 2. Si provi a vettorizzare la funzione applicando parallelamente la successioni a tutti i punti della griglia. Per fare questo è comodo utilizzare il comando `[X, Y]=meshgrid(x, y)` generando la griglia $Z = X + iY$ dei punti z_1 nel rettangolo del piano complesso $[a, b] \times i[c, d]$. Si ottiene direttamente la matrice J al termine delle k iterazioni.

3 Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è una piccola variazione dell'insieme di Julia, ed è costituito dai punti z_0 del piano complesso per cui le successioni

$$z_{k+1} = z_k^2 + z_0 \tag{2}$$

sono limitate.



Si vogliono disegnare i bacini di attrazione, cioè i punti per la quale la successione è convergente, al variare del punto iniziale z_0 nel rettangolo del piano complesso $[a, b] \times i[c, d]$.

Esercizio 3. Per il punto $z_0 = 0.25 - 0.54i$ si generino alcune iterazioni della successione (2). È limitata? Si ripeta la stessa cosa per il punto $z_0 = 0.22 - 0.54i$.

In realtà non è necessario raggiungere una situazione di overflow per capire che la successione è divergente ma non appena z è tale che $|z| > 2$ sappiamo che la successione sarà divergente perchè si comporta come 2^{2^k}.

Esercizio 4. Come fatto per l'insieme di Julia, per ogni punto di una griglia rettangolare che discretizza il rettangolo del piano complesso `[a, b] x i [c, d]` si generi la successione (2). Si metta un controllo su $|z| > 2$. Nel caso di un ciclo periodico si può uscire dal ciclo con <ctrl>-c. I punti per i quali il codice non termina appartengono all'insieme di Mandelbrot.

Il numero di iterazioni richieste per z per uscire dal disco di raggio 2 ci permette di visualizzare i dettagli delle frange...

Esercizio 5. Si aggiunga al controllo su $|z| < 2$ un controllo su un contatore k, incrementato ad ogni iterazione., Si esce dal ciclo quando $|z| \geq 2$ oppure k è maggiore di un certo valore predefinito `depth`.

Se esco dal ciclo con $k <$ `depth` allora z_0 è fuori dall'insieme di Mandelbrot. Se k arriva a `depth` allora z_0 è dentro l'insieme di Mandelbrot.

Ecco una tabella con il valore di k per z_0 in un intorno del punto $z_0 = 0.22 - 0.54i$. Settando `depth`=512 otteniamo:

	0.205	0.210	0.215	0.220	0.225	0.230	0.235	0.240	0.245
-0.520	512	512	512	512	512	512	44	512	512
-0.525	512	512	512	512	512	36	51	512	512
-0.530	512	512	512	512	35	31	74	512	512
-0.535	512	512	512	512	26	28	57	512	512
-0.540	512	139	113	26	24	73	56	512	512
-0.545	512	199	211	21	22	25	120	512	512
-0.550	33	25	21	20	20	25	63	85	512
-0.555	34	20	18	18	19	21	33	512	512
-0.560	62	19	17	17	18	33	162	40	344

I punti in cui ho 512 sono quelli su cui abbiamo convergenza, gli altri sono quelli non appartenente all'insieme di Mandelbrot.

L'indice k può essere usato come una colormap di dimensione `depth` $\times$ 3. Il primo colore è associato ai punti che hanno $|z_0| > 2$, quelli successivi sono associati ai punti z_0 che generano traiettorie che escono dal disco di raggio 2 dopo alcuni passi. L'ultima riga della mappa dei colori è associato ai punti che "sopravvivono" cioè che appartengono all'insieme di Mandelbrot.

Si vuole adesso applicare l'iterazione (2) contemporaneamente un una regione rettangolare del piano complesso usando la vettorizzazione. Con i comandi

```
>> x=0:0.05:0.80;
>> y= 0:0.05:0.80;
>> [X, Y]=meshgrid(x, y);
>> Z0=X+1i*Y;
```

$Z0$ è una matrice che "rappresenta" la regione del piano complesso con parte reale e complessa compresa tra 0 e 0.80, in particolare $Z0(k, h) = (k-1)*0.05) + i(h-1)*0.05$.

Esercizio 6. Si vettorizzi l'iterazione definita da (2) generando contemporaneamente le successioni che partono da un qualsiasi punto in`Z0`.

Esercizio 7. Si cerchi di capire cosa fa il seguente pezzo di codice

```
>> depth=32;
>> for k=1:depth;
>> Z=Z.^2+Z0;
>> c(abs(Z)<2)=k;
```

Siamo pronti per fare disegnare il nostro frattale! Il lavoro è fatto dai comandi

```
>>image(c)
>> axis image
>> jet(depth);
```

La figure precedente è disegnata scegliendo $x = -2 : 0.001 : 1, y = -1 : 0.001 : 1.5$, `depth`=512. Cosa succede aumentando il valore di `depth`?

Esercizio 8. Si metta tutto assieme e si scriva una funzione `function c=mandelbrot(depth, x, y)` che disegna il frattale di Mandelbrot nella regione del piano complesso individuata dai vettori x e y.

Esercizio 9. Si modifichi la funzione precedente inserendo tra i parametri un valore $p > 1$ da usare come esponente in alternativa al 2 nella definizione della successione, cioè

$$z_{k+1} = z_k^p + z_0.$$

Si visualizzino le immagini relative.