# Esperienze di programmazione
# Lezione 2

Gianna Del Corso <delcorso@di.unipi.it>

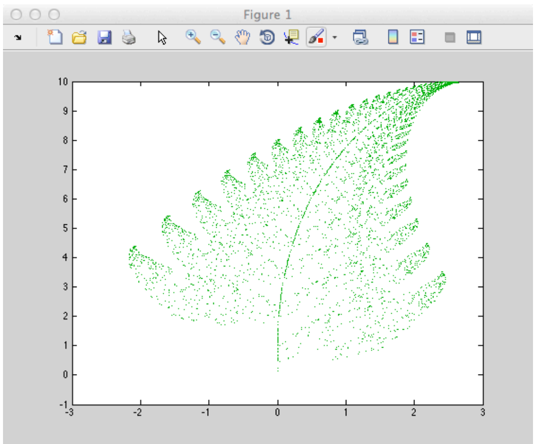
11 Marzo 2015

## 1 Frattale Fern

Il frattale *Fern* si ottiene disegnando una successione di punti nel piano ottenuti applicando una trasformazione lineare affine al punto precedente, cioè una trasformazione del tipo

$$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

con $A$ matrice $2 \times 2$ e $\mathbf{b}$ vettore.




Per disegnarlo viene generato un numero casuale tra 0 e 1 e, a seconda del valore ottenuto, si applica una tra 4 possibili trasformazioni del piano.

- $$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$

questa trasformazione muove un punto in alto a destra costruendo la punta della foglia.

- $$A_2 = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$
  questa trasformazione sposta il punto in basso a destra,
- $$A_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix},$$
  questa trasformazione sposta il punto in basso a sinistra,
- $$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$
  questa trasformazione sposta il punto sul gambo della foglia.

*Esercizio* 1. Per ognuna delle 4 trasformazioni si scriva uno script che, a partire dal punto `x=[1; 1]`, applichi 50 volte la trasformazione $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ disegnando con `plot(x(1), x(2), '.g')` il punto ottenuto. **Suggerimento:** Con il comando `hold on` per impedire il refresh della finestra grafica.

Il frattale fern è costruito nel seguente modo: Si definisce il vettore $\mathbf{p} = [0.85, 0.92, 0.99, 1]^T$ che rappresenta le probabilità con cui scegliere una delle 4 trasformazioni.

1. Si pone $\mathbf{x} = [0.5; 0.5]$.
2. Si eseguono $n$ iterazione del seguente schema:
   - Si estrae con distribuzione uniforme un numero $r$, $r \in [0, 1]$. Se $r \leq p(1)$ si pone $i = 1$, se $p(1) < r \leq p(2)$, si pone $i = 2$, se $p(2) < r \leq p(3)$ si poine $i = 3$, altrimenti, se $r > p(3)$ si pone $i = 4$.
   - Si definisce $\mathbf{x}_{k=1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$.

*Esercizio* 2. Si scriva una funzione `fern(n)` che disegna nel piano i punti $\mathbf{x}_k$ con $k = 1, \ldots, n$.

## 2 Triangolo di Sierpinski

Date $n$ matrici $2 \times 2$ $Ai$ e $n$ vettori $b_i$, $i, 1, 2, \ldots, n$, si costruisce una matrice $C$ di dimensione $2n \times 3$ nel seguente modo

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Si scriva una funzione `sierpinski(C, m)` che genera i punti nel piano in accordo al seguente algoritmo

- Si generi il vettore `d` tale che `d(i)=det(A_i)`.
- Si modifichi `d` per ottenere dei valori tra 0 e 1 nel seguente modo

```
d=max(d, max(d)/(25*n))
d=d/sum(d);
```

- si crei il vettore $p$ di $n$ componenti con $p(1) = 0$ e $p(i+1) = \sum_{k=1}^{i} d(k)$.
- si disegni sul piano il punto di coordinate $\mathbf{x}_k$ per $21 \leq k \leq 20 + m$ dove il vettore $\mathbf{x}_k$ è ottenuto nel seguente modo
  1. $\mathbf{x}_1$ è scelto a caso con distribuzione uniforme tra 0 e 1.
  2. Per $k = 1, 2, \ldots$ si sceglie un numero random tra 0 e 1, $r$ e si individua l'indice $i$ tale che $p(i) \leq r < p(i+1)$, e si definisce $\mathbf{x}_{k+1} = A_i\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$. Si provi il comando `i=sum(p<r)`. Cosa fa?

Si provi la funzione con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Si veda cosa succede invece utilizzando la seguente matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & -1/3\sin(\pi/3) & 1/3 \\ 1/3\sin(\pi/3) & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3\sin(\pi/3) & 0.5 \\ -1/3\sin(\pi/3) & 1/6 & 1/3\sin(\pi/3) \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$