Calcolo Numerico A/B
Foglio di esercizi n. 3

Gianna Del Corso <delcorso@di.unipi.it>

25 Novembre 2013

In questa dispensa ci sono alcuni esercizi proposti di settimana in settimana. Il loro svolgimento non è in alcun modo obbligatorio, ma siete incoraggiati a svolgerli e a approfondire gli eventuali dubbi a ricevimento o alla lezione successiva!

1 Esercizi su Autovalori, Norme e Sistemi lineari

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

a) Si dimostri che A e A^T hanno gli stessi autovalori.

b) Si dica quando le matrici A e A^T sono simili.

c) Si costruisca una matrice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tale che gli autovettori di A e di A^T non siano gli stessi.

d) Si dimostri che se $\mathbf{x}$ è autovettore di A corrispondente all'autovalore λ_i e $\mathbf{y}$ è autovettore di A^T corrispondente all'autovalore $\lambda_j \neq \lambda_i$, allora $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0$ e quindi se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono reali, allora sono anche ortogonali.

Esercizio 2. Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si dimostri che le matrici AB e BA hanno gli stessi autovalori. Se A e B sono non singolari è possibile che AB e BA pur avendo gli stessi autovalori non siano simili: si esamini il caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sia $A_j \in R^n$ la j-esima colonna di A. Dimostrare che la funzione $\phi(A) = \max_j \|A_j\|_2$ non definisce una norma matriciale.

Esercizio 4. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ha la seguente struttura

$$A = \begin{pmatrix} D & P \\ Q & R \end{pmatrix}$$

dove $D, P, Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e D è una matrice diagonale. Calcolare quante operazioni moltiplicative sono richieste in generale per ridurre A in forma triangolare utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss. Assumere che non sia necessario effettuare scambi di righe.

Esercizio 5. É data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Si calcoli l'inversa di A applicando il metodo di Gauss.

(b) Si calcoli il numero di condizionamento di A in norma infinito.

Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si individui l'insieme S dei valori dei parametri α e β per cui A è definita positiva.

(b) Si dica se, per i valori dei parametri in S, il metodo di Gauss può essere applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice A senza che siano richiesti scambi di righe.

Esercizio 7. É data la matrice A di ordine n di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si calcoli A^{-1} nel caso $n = 5$.

b) Si generalizzi al caso di n qualsiasi, verificando la correttezza della generalizzazione mediante il prodotto $A^{-1}A$.

c) Si calcoli $\mu_\infty(A)$.