

Calcolo Numerico A/B

Foglio di esercizi 1

Gianna Del Corso <delcorso@di.unipi.it>

8 ottobre 2013

In questa dispensa ci sono alcuni esercizi proposti di settimana in settimana. Il loro svolgimento non è in alcun modo obbligatorio, ma siete incoraggiati a svolgerli e a approfondire gli eventuali dubbi a ricevimento o alla lezione successiva!

1 Esercizi di conversione in base e di rappresentazione

Esercizio 1. Rappresentare in $F(2, 4, m, M)$ con arrotondamento i seguenti numeri

(a) $\frac{1}{10}$, (b) $\frac{7}{9}$, (c) π (d) $\frac{5}{3}$.

Esercizio 2. Sia $fl(x)$ la rappresentazione, ottenuta per troncamento, nell'insieme $F(10, 3, m, M)$ di un numero $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Dimostrare che $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $0 < x_1 \leq x_2$ implica $fl(x_1) \leq fl(x_2)$.
(b) Dimostrare con un opportuno esempio che $fl(x_1) \leq fl(x_2)$ non implica che $x_1 \leq x_2$.

Esercizio 3. (a) Supponendo di operare con arrotondamento, determinare i primi due interi positivi che hanno la stessa rappresentazione in $F(2, 3, 5, 4)$.

- (b) Stessa domanda del punto (a) per $F(2, 24, 128, 127)$.

Esercizio 4. Si consideri un'aritmetica con troncamento definita su $F(10, 3, 3, 3)$.

- (a) Trovare $a, b \in F$ tali che $(a \oplus b) \oslash 2$ risulti uguale ad a .
(b) Trovare $a, b \in F$ tali che $(a \oplus b) \oslash 2$ risulti minore sia di a che di b .

2 Condizionamento e stabilità

Esercizio 5. Quale delle due espressioni equivalenti (dal punto di vista matematico)

$$(1 + x^2)(1 - x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

è più stabile? Si studi anche il condizionamento del calcolo dell'espressione precedente.

Esercizio 6. È nota dalla trigonometria la relazione

$$f(x) = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \text{per } x \in (0, \pi).$$

- Si studi il condizionamento del calcolo della funzione $f(x)$ per $x \in (0, \pi)$.
- Si studi e si confronti la stabilità dei due algoritmi per il calcolo di $f(x)$ basati sulla prima e sulla seconda delle due espressioni, supponendo di servirsi di funzioni di libreria per il calcolo delle funzioni tangente, seno e coseno.

Esercizio 7. Si studi il condizionamento e la stabilità del calcolo di $f(x) = 1 - e^{-x}$ per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Sia $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$ con $0 \leq x \leq \pi/2$. Si studi il condizionamento e la stabilità del calcolo di $f(x)$.

Esercizio 9. Si vuole approssimare la funzione $f(x) = 5e^x + 3e^{-x}$ con il polinomio $p(x) = 8 + 2x + 4x^2$ per $x \in [0, 1]$. Si vuole valutare il polinomio operando in $F = \mathcal{F}(2, 20, 128, 127)$ con arrotondamento.

- Si calcoli il numero di elementi (cardinalità) dell'insieme $G = F \cap [0, 1]$.
- Si calcoli la precisione di macchina u .
- Si individui una maggiorazione per l'errore analitico (si osservi che $p(x)$ è il polinomio di Taylor di secondo grado che approssima $f(x)$ nell'intorno di 0).
- Si individui una maggiorazione per l'errore inerente assumendo $|\varepsilon_x| < u$.
- Si individui una maggiorazione per l'errore algoritmico assumendo che $p(x)$ sia calcolato con l'algoritmo suggerito dall'uguaglianza: $p(x) = 8 + x(2 + 4x)$.
- Si individui una maggiorazione per l'errore totale.
- Si suggerisca in che modo l'errore totale potrebbe venire ridotto.