ALTRI QUANTIFICATORI

SINTASSI DEL CALCOLO DEL PRIMO ORDINE

Prop ::= Impl | Prop ≡Prop

Impl ::= Giunz | Giunz ⇒ Impl

Giunz ::= And | Or

And ::= Andprim { ∧ Andprim}

Or ::= Orprim { ∨ Orprim}

Andprim ::= Prim | (Or)

Orprim ::= Prim | (And)

Prim ::= Atom | ~Atom

Atom ::= **T** | **F** | Ide | (Prop) |

Pred | Term = Term | FbfQuant

SINTASSI DEL CALCOLO DEL PRIMO ORDINE E ALTRI QUANTIFICATORI

Fbf ::= Prop | FbfQuant

FbfQuant ::= (∀Var.Fbf) | (∃Var.Fbf)

Pred ::= PIde (Term {, Term})

Term ::= Const | Var | FIde (Term {, Term}) | Exp

(∑ Var : Fbf .Term) | #{Var : Fbf | Fbf}|

(**max** Var : Fbf .Term) |

(**min** Var : Fbf .Term)

Const ::= 0 | 1 | 2 | ... | +∞ | -∞

Exp ::= ... *ordinarie espressioni aritmetiche*

x occorre legata in

(∑ x:P.E), #{x:P | Q}, (**max** x:P.E), (**min** x:P.E)

SOMMATORIA E CARDINALITÀ

- $(\Sigma\, x : P(x) \,.\, E(x))$ denota
  "la somma di tutti gli E(v) per tutti i v per cui vale P(v)"

- $\#\{ x : P(x) \mid Q(x)\}$ denota
  "il numero dei Q(v) veri per tutti i v per cui vale P(v)"

- # può essere definita mediante Σ
  $\#\{ x : P \mid Q\} = (\Sigma\, x : P \wedge Q \,.\, 1)$ (Elim-#)
  da cui
  $\#\{ x : P \mid Q\} = \#\{ x \mid P \wedge Q\} = \#\{x: P \wedge Q \mid \mathbf{T}\}$

MINIMIZZAZIONE E MASSIMIZZAZIONE

(**max** x:P(x).E(x)) denota

“il massimo dei valori E(v) per tutti i v per cui vale P(v)”

(**min** x:P(x).E(x)) denota

“il minimo dei valori E(v) per tutti i v per cui vale P(v)”

(**min** x:P.–E) = – (**max** x:P.E) (**min**:**max**)

LEGGI GENERALI VALIDE PER I QUANTIFICATORI NON STANDARD

- *legge di ridenominazione*

  ad esempio

  $$(\Sigma x : P \,.\, E) \equiv (\Sigma y : P[y/x] \,.E[y/x]\,)$$

  se y non occorre né in P né in E

- *Legge di annidamento*

  ad esempio

  $$(\Sigma\, y{:}R.(\Sigma\, x{:}S.P)) = (\Sigma\, x{:}S.(\Sigma\, y{:}R.P))$$

  se y non è libero in S e x non è libero in R

LEGGI SPECIFICHE

- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{min}\ x{:}P.\ E) \geq (\mathbf{min}\ x{:}Q.\ E)$ $\quad$ $(\mathbf{min}{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\mathbf{max}\ x{:}P.\ E) \leq (\mathbf{max}\ x{:}Q.\ E)$ $\quad$ $(\mathbf{max}{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow (\mathbf{m}\ x{:}P.\ E) = (\mathbf{m}\ x{:}Q.\ E)$
  con **m** uguale a **min** o **max** $\quad$ $(\mathbf{m}{:}\equiv)$

- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} = \#\{\ x{:}Q \mid R\}$ $\quad$ $(\#{:}\equiv)$

- $(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} \leq \#\{\ x{:}Q \mid R\}$ $\quad$ $(\#{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ R \Rightarrow S) \Rightarrow \#\{\ x{:}P \mid R\} \leq \#\{\ x{:}P \mid S\}$

- $(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow (\Sigma x{:}P.\ E) = (\Sigma x{:}Q.\ E)$ $\quad$ $(\Sigma{:}\equiv)$

LEGGI SPECIFICHE PER $\sum$

- $(\forall x.\ E \geq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sum x{:}P.E) \leq (\sum x{:}Q.E)$ $\qquad (\sum{:}\Rightarrow)$
- $(\forall x.\ E \leq 0 \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sum x{:}P.E) \geq (\sum x{:}Q.E)$
- $(\sum x : P\ .\ E + F) = (\sum x : P\ .\ E) + (\sum x : P\ .\ F)$ $\qquad (\sum{:}+)$

- $(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E\ \mathit{max}\ F) =$

  $(\mathbf{max}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x{:}P.\ F)$
- $(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E\ \mathit{min}\ F) =$

  $(\mathbf{min}\ x{:}P.\ E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x{:}P.\ F)$

LEGGI DI DOMINIO

- $(\sum x{:}P \vee Q.E) = (\sum x{:}P.E) + (\sum x{:}Q.E) - (\sum x{:}P \wedge Q.E)$

- $\#\{x{:}P \vee Q \mid R\} =$

  $\#\{x{:}P \mid R\} + \#\{x{:}Q \mid R\} - \#\{x{:}P \wedge Q \mid R\}$

- $(\mathbf{max}\ x{:}P \vee Q.E) = (\mathbf{max}\ x{:}P.E)\ \mathit{max}\ (\mathbf{max}\ x{:}Q.E)$

- $(\mathbf{min}\ x{:}P \vee Q.E) = (\mathbf{min}\ x{:}P.E)\ \mathit{min}\ (\mathbf{min}\ x{:}Q.E)$

COSTANTE E DISTRIBUTIVITÀ

- $(\Sigma x : P \,.\, c) = c \times (\Sigma x : P \,.\, 1)$ se x non è libera in c
- $(\mathbf{m}\ x : P \,.\, c) = c$ se x non è libera in c e P non è vuoto
- $(\Sigma x : P \,.\, c \times E) = c \times (\Sigma x : P \,.\, E)$ se x non è libera in c
- $(\mathbf{m}\ x : P \,.\, c + E) = c + (\mathbf{m}\ x : P \,.\, E)$ se x non è libera in c e P non è vuoto

SINGOLETTO E VUOTO

- $(\sum x: x = y \,.\, E) = E[y/x]$

- $\#\{x: x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \sim R[y/x] \end{cases}$

- $(\sum x: P \,.\, E) = 0$ se P è vuoto
- $\#\{x: P \mid P\} = 0$ se P è vuoto
- $(\mathbf{min}\ x : P \,.\, E) = +\infty$ se P è vuoto
- $(\mathbf{max}\ x : P \,.\, E) = -\infty$ se P è vuoto

INTERVALLI

[a,b] un intervallo non vuoto di naturali e $k \in [a,b]$

$$(\Sigma x : x \in [a,b] \wedge P.\ E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P\} + 1 & \text{se } P[k/x] \\ \#\{x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.E)\ \ m\ E[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.E) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

INTERVALLI (specializzando per k=b)

[a,b] un intervallo non vuoto di naturali

$$(\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P.\ E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a,b) \wedge P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ \#\{x : x \in [a,b) \wedge P) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m}\ x : x \in [a,b] \wedge P.E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E)\ \ m\ E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m}\ x : x \in [a,b) \wedge P.E) & \text{se } \sim P[b/x] \end{cases}$$

PROVA DI: $P[k/x] \Rightarrow$

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge P.\ E) = (\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x]$

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge P.\ E)$ = {Terzo escluso,Unità}

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge (x = k \vee x \neq k) \wedge P.\ E)$ = {Distributività}

$\sum x: (x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P) \vee (x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P).\ E$ = {Dominio}

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P.\ E) + (\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$ –

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Contraddizione, Vuoto}

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge x=k \wedge P.\ E) + (\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Leibniz}

$(\sum x: k \in [a,b] \wedge x=k \wedge P[k/x]\ .\ E) + (\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {**Ip**: $k \in [a,b] \wedge P[k/x]$ }

$(\sum x: x=k.\ E) + (\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E)$

= {Singoletto}

$(\sum x: x \in [a,b] \wedge x \neq k \wedge P.\ E) + E[k/x]$

ESEMPIO, PROVA DI:
$S = (\sum X: X \in [1, 3] \wedge PARI(X) . X^2) \equiv S = 4$

$s = (\sum x: x \in [1, 3] \wedge pari(x) . X^2)$

$\equiv$ {Interv, $1 \in [1,3]$, ~pari(1), def. di intervallo}

$s = (\sum x: x \in [2, 3] \wedge pari(x) . X^2)$

$\equiv$ {Interv, $3 \in [2,3]$, ~pari(3), def. di intervallo}

$s = (\sum x: x \in [2, 2] \wedge pari(x) . X^2)$

$\equiv$ {Interv, $2 \in [2, 2]$, pari(2), def. di intervallo}

$s = (\sum x: x \in (2, 2] \wedge pari(x) . X^2) + 4$

$\equiv$ {(2,2] vuoto, Vuoto}

$s = 0 + 4$

$\equiv$ {calcolo}

$s = 4$

ANCORA LEGGI PER GLI INTERVALLI

Sia [a,b) un intervallo non vuoto di naturali.

$\#\{x \in [a, b) \mid P\} = 0 \equiv (\forall x \in [a,b).\ \sim P)$

$\#\{x \in [a, b) \mid P\} > 0 \equiv (\exists x \in [a,b).\ P)$

$(\forall x \in [a,b).\ \sim P) \Rightarrow (\mathbf{max}\{x \in [a,b) \mid P\} = -\infty)$

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow \mathbf{max}\{x \in [a,b) \mid P\} \in [a,b)$

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (m = \mathbf{max}\{x \in [a,b) \mid P\} \equiv$

$(m \in [a,b) \wedge P[m/x] \wedge (\forall x \in (m,b).\ \sim P))\ )$

$(\forall x \in [a,b).\ \sim P) \Rightarrow (\mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\} = +\infty)$

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow \mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\} \in [a,b)$

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (m = \mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\} \equiv$

$(m \in [a,b) \wedge P[m/x] \wedge (\forall x \in [a, m).\ \sim P))\ )$

ESEMPIO

$(\exists x \in [a,b).\ P) \Rightarrow (b\ \mathit{max}\ \ \mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\}) = b$

$(\exists x \in [a,b).\ P)$

$\Rightarrow \{\text{min-}\exists\}$

$\mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\} \in [a,b)$

$\equiv \{\text{def., poniamo } m = \mathbf{min}\{x \in [a,b) \mid P\}\}$

$a \leq m \wedge m < b$

$\Rightarrow \{\text{sempl-}\wedge\}$

$m < b$

$\Rightarrow \{\text{def. max}\}$

$(b \max m) = b$