UNA PRIMA APPLICAZIONE:

Teoria degli insiemi

RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI E ESTENSIONALI

- Assumendo per comodità i naturali come universo
- Rappresentazione estensionale (in extenso)
  Divisori_di_30 = {1,2,3,5,6,10,15,30}
- Rappresentazione intensionale (in intenso)

$$\text{Divisori_di_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge \exists n.\ x \times n = 30\}$$

- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti

$$\text{Multipli_di_7} = \{x \mid \exists n.\ x = n \times 7\}$$

NOTAZIONE PER INSIEMI

- Insieme vuoto: $\emptyset = \{x \mid F\}$
- (def-$\in$)

$$y \in \{x \mid P\} \equiv P(y)$$

- (Ins: $\equiv$)

$$(\forall x.\ P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins: $\Rightarrow$)

$$(\forall x.\ P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

$z \in \{x \mid P\}$

$\equiv$ {def-$\in$}

$P\,[z/x]$

$\Rightarrow$ {**Ip**: $\forall x.\ P \Rightarrow Q$, Elim- $\forall$}

$Q\,[z/x]$

$\equiv$ {def-$\in$}

$z \in \{x \mid Q\}$.

UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$ (con l'ovvio significato).

I predicati $=$, $\leq$ e $\geq$ soddisfano i seguenti assiomi (in cui la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività-=)
- $x = y \Rightarrow y = x$ (simmetria-=)
- $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (transitività-=)

- $x \leq x$ (riflessività-$\leq$)
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetria-$\leq$)
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitività-$\leq$)
- $x \leq y \vee y \leq x$ (totalità-$\leq$)

- $x \geq y \equiv y \leq x$ (def-$\geq$)

UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x \, R \, x$
  - simmetrica: $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
  - transitiva: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$
  - Esempio: l'uguaglianza =
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica: $(x \, R \, y) \wedge (y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
  - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è totale se
  - per ogni x, y $x \, R \, y$ or $y \, R \, x$
  - Esempio: $\leq$ su numeri naturali

INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche:

- $[a, b] \cong \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a, b) \cong \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] \cong \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) \cong \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto

- $x \neq y \cong \sim(x = y)$ (def-≠)
- $x < y \cong x \leq y \wedge x \neq y$ (def-<)
- $x > y \cong x \geq y \wedge x \neq y$ (def->)

RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

- Legge ($\sim$-$\leq$)
  - $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
  - $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

$x > y$

$\equiv$ {def->}

$x \geq y \wedge x \neq y$

$\equiv$ {lemma}

$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$

$\equiv$ {distr}

$(x \geq y \wedge \sim(x \leq y)) \vee (x \geq y \wedge \sim(x \geq y))$

$\equiv$ {terzo escluso, unità}

$x \geq y \wedge \sim(x \leq y)$

- Es: $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$

- Dimostriamo la prima, usando il seguente **lemma**:

$x \neq y \equiv \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$

[con antisimm-$\leq$, rifl-$\leq$]

$\sim(x \leq y)$

$\equiv$ {totalità, P and T = P}

$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \vee x \leq y)$

$\equiv$ {distr}

$(\sim(x \leq y) \wedge x \geq y) \vee (\sim(x \leq y) \wedge x \leq y)$

$\equiv$ {terzo escluso, unità}

$\sim(x \leq y) \wedge x \geq y$

- Es: $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME

- Abbreviamo

  $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ con $(\forall x{:}P\ .Q)$

  e

  $(\exists x.P \wedge Q)$ con $(\exists x{:}P.\ Q)$
- In queste formule parliamo di P come il *dominio* del quantificatore
- Una formula è *vacuamente vera* se il dominio del quantificatore universale è vuoto

$(\forall X{:}P.Q) \equiv \mathbf{T}$ SE P È VUOTO (Vuoto) PROVA PER ASSURDO

$\sim(\forall x{:}P.Q)$

$\equiv$ {definizione}

$\sim(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$\equiv$ {De Morgan}

$(\exists x.\ \sim(P \Rightarrow Q))$

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$}

$(\exists x.\ \sim(\sim P \vee Q))$

$\equiv$ {De Morgan}

$(\exists x.\ P \wedge \sim Q)$

$\Rightarrow$ $\{(\exists x.\ P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.\ P) \wedge (\exists x.\ Q)\}$

$(\exists x.\ P) \wedge (\exists x.\ \sim Q)$

$\equiv$ {**Ip**: P vuoto}

$\mathbf{F} \wedge (\exists x\ \sim Q)$

$\equiv$ {Zero}

$\mathbf{F}$

$(\exists X{:}P.Q) \equiv \mathbf{F}$ SE P È VUOTO (Vuoto)

PROVO CHE $(\exists X{:}P.Q) \Rightarrow \mathbf{F}$ È VERA E QUINDI $(\exists X{:}P.Q)$ È FALSA

$(\exists x{:}P.Q)$

$\equiv$ {definizione}

$(\exists x.P \wedge Q)$

$\Rightarrow$

$(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {P è vuoto}

$F \wedge (\exists x.Q)$

$\equiv$ {zero}

F

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (1)

- Annidamento

  $(\forall y{:}R.(\forall x{:}S.P)) \equiv (\forall x{:}S.(\forall y{:}R.P))$

  se y non è libera in S e x non è libera in R

- $(\exists y{:}R.(\exists x{:}S.P)) \equiv (\exists x{:}S.(\exists y{:}R.P))$

  se y non è libera in S e x non è libera in R

- $\forall$-$\wedge$

  $(\forall x{:}R.P \wedge Q) \equiv (\forall x{:}R.P) \wedge (\forall x{:}R.Q)$

- $\exists$-$\vee$

  $(\exists x{:}R.P \vee Q) \equiv (\exists x{:}R.P) \vee (\exists x{:}R.Q)$

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (2)

- Dominio

  $(\forall x{:}P \vee Q.R) \equiv (\forall x{:}P.R) \wedge (\forall x{:}Q.R)$

  $(\exists x{:}P \vee Q.R) \equiv (\exists x{:}P.R) \vee (\exists x{:}Q.R)$

- Costante

  $(\forall x{:}R.Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z
  e R non è vuoto

  $(\exists x{:}R.Z) \equiv Z$ se x non è libera in Z
  e R non è vuoto

- Distributività

  $(\forall x{:}R.P) \vee Z \equiv (\forall x{:}R.P \vee Z)$ se x non è libera in Z
  (Distrib)

  $(\exists x{:}R.P) \wedge Z \equiv (\exists x{:}R.P \wedge Z)$ se x non è libera in Z

ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI (3)

- Distributività

  $(\forall x{:}R.P) \wedge Z \equiv (\forall x{:}R.P \wedge Z)$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

  $(\exists x{:}R.P) \vee Z \equiv (\exists x{:}R.P \vee Z)$ se x non è libera in Z e R non è vuoto

- De Morgan

  $\sim(\forall x{:}R.P) \equiv (\exists x{:}R.\sim P)$

  $\sim(\exists x{:}R.P) \equiv (\forall x{:}R.\sim P)$

- Singoletto

  $(\forall x{:}x=i.P) \equiv P[i/x]$

  $(\exists x{:}x=i.P) \equiv P[i/x]$

NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- $(\forall x \in I.Q) \cong (\forall x : x \in I.Q)$
- $(\exists x \in I.Q(x)) \cong (\exists x : x \in I.Q)$
- $(\forall\ x_1,\ldots,x_n,\ y \in I.\ Q) \cong (\forall\ x_1,\ldots,x_n \in I.\ (\forall y \in I.\ Q))$
  $n \geq 1$
- $(\exists\ x_1,\ldots,x_n,\ y \in I.\ Q) \cong (\exists\ x_1,\ldots,x_n \in I.\ (\forall y \in I.\ Q))$
  $n \geq 1$
- Osserviamo che:

  $(\forall x \in \emptyset.Q) \equiv \mathbf{T}$

  $(\exists x \in \emptyset.Q) \equiv \mathbf{F}$

LEGGI

$$(\forall x{:}P.\ Q) \equiv \begin{cases} (\forall x{:}P \wedge x \neq k.Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x{:}P \wedge x \neq k.Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x{:}P.\ Q) \equiv \begin{cases} (\exists x{:}P \wedge x \neq k.Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x{:}P \wedge x \neq k.Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$P[K/X] \Rightarrow (\forall X{:}P.\ Q) \equiv (\forall X{:}P \wedge X \neq K.Q) \wedge Q[K/X]$$

$(\forall x{:}P.\ Q)$

$\equiv$ {Terzo escluso, Unità}

$(\forall x{:}P \wedge (x=k \vee x\neq k).\ Q)$

$\equiv$ {Distributività}

$(\forall x{:}(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x\neq k).\ Q)$

$\equiv$ {Dominio}

$(\forall x{:}\ P \wedge x=k.\ Q) \wedge (\forall x{:}\ P \wedge x\neq k.\ Q)$

$\equiv$ {Leibniz}

$(\forall x{:}\ P[k/x] \wedge x=k.\ Q) \wedge (\forall x{:}\ P \wedge x\neq k.\ Q)$

$\equiv$ {**Ip**: $P[k/x]$, Unità}

$(\forall x{:}x=k.\ Q) \wedge (\forall x{:}\ P \wedge x\neq k.\ Q)$

$\equiv$ {Singoletto}

$Q[k/x] \wedge (\forall x{:}\ P \wedge x\neq k.\ Q)$

LEGGI PER GLI INTERVALLI(1)

$$(\forall x{:}[a,b).\ Q) \equiv \begin{cases} (\forall x{:}[a,b) \wedge x \neq k.Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a,b) \\ (\forall x{:}[a,b) \wedge x \neq k.Q) & \text{se } k \notin [a,b)] \end{cases}$$

$$(\exists x{:}[a,b).\ Q) \equiv \begin{cases} (\exists x{:}\ [a,b) \wedge x \neq k.Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a,b) \\ (\exists x{:}\ [a,b) \wedge x \neq k.Q) & \text{se } k \notin [a,b)] \end{cases}$$

LEGGI PER GLI INTERVALLI (2)

$(\forall x \in [a,b].P) \equiv (\forall x \in [a,b).P) \wedge P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\forall x \in [a,b].P) \equiv (\forall x \in (a,b].P) \wedge P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x \in [a,b].P) \equiv (\exists x \in [a,b).P) \vee P[b/x]$

se [a,b] non è vuoto

$(\exists x \in [a,b].P) \equiv (\exists x \in (a,b].P) \vee P[a/x]$

se [a,b] non è vuoto

SPECIFICHE

- Un array **a** è specificato come una funzione da un intervallo **[0, n]** ai numeri naturali
- Notazione: il valore i-esimo della funzione (array) **a** è indicato come **a[i]**
- Es: a={<0,45>,<1,23>,<2,10>,<3,16>}

  a[2]=10

ESERCIZI

1. a è un array con tutti gli elementi a 0
2. a rappresenta una funzione monotona strettamente crescente
3. m è il massimo dell'array a
4. m è l'indice del massimo dell'array a
5. l'array a ha un solo minimo locale
6. a ha tutti elementi distinti
7. b è l'array a ordinato in senso crescente