RELAZIONI TRA SINTASSI E SEMANTICA

INTERPRETAZIONI E MODELLI

- Sia Γ un insieme di **enunciati dichiarativi** (asserzioni che hanno valore T o F)
- Una **intepretazione** assegna un significato ad ogni componente degli enunciati dichiarativi
  - Caso particolare: se gli enunciati dichiarativi sono proposizioni l'interpretazione assegna un valore di verità alle proposizioni elementari
- Una intepretazione che rende veri tutti gli enunciati dichiarativi in Γ è detta un **modello** di Γ.
- Se un enunciato Q è vero in *tutti* i modelli di Γ si dice che

  Q è **conseguenza logica** di Γ ($\Gamma \models Q$)

IL CASO SEMPLICE DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Dato Γ, il numero di possibili interpretazioni è finito: se n è il numero di proposizioni elementari in Γ, il numero di possibili interpretazioni è 2^n.

- E' dunque sempre possibile, ma costoso, decidere se $\Gamma \models Q$

- Abbiamo visto che anche un **calcolo**, basato su specifiche leggi (p.e. modus ponens) consente di dimostrare a partire da un insieme di premesse Γ una asserzione Q ($\Gamma \vdash Q$)

QUANDO POSSIAMO FIDARCI DEL NOSTRO CALCOLO?

- Le proprietà fondamentali di un calcolo sono
  - **Correttezza**: se $\Gamma \vdash Q$ allora $\Gamma \models Q$

    ovvero se il calcolo ci consente di dimostrare Q assumendo veri gli enunciati di Γ allora Q è vero in tutti i modelli di Γ.
  - **Completezza**: se $\Gamma \models Q$ allora $\Gamma \vdash Q$

    ovvero se Q è conseguenza logica di Γ allora è possibile costruire una prova di Q a partire dalle premesse Γ nel nostro calcolo
- Osservazione: la correttezza è una condizione essenziale per un calcolo logico, sulla completezza .... si può trattare.

LA NECESSITÀ DEL CALCOLO

- Non appena estendiamo gli enunciati dichiarativi con l'uso di **variabili** con **dominio infinito** il numero di modelli diventa immediatamente infinito, il che impedisce una **dimostrazione semantica estensionale** (ovvero modello per modello) di una conseguenza logica.
- La strada è quindi ricorrere ai **calcoli logici** con proprietà (almeno) di correttezza.

OLTRE LE PROPOSIZIONI: CALCOLO DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

- Alfabeto:
  - Un insieme *C* di simboli di costante
  - Un insieme *F* di simboli di funzione
  - Un insieme *V* di simboli di variabile
  - Un insieme *P* di simboli di predicato
  - I simboli $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$ (connettivi)
  - I simboli $\forall$, $\exists$ (quantificatori)
  - I simboli "(" , ")",","," e "."

TERMINI

- I termini sono gli oggetti del linguaggio che possono apparire come argomenti di predicati
  - Ogni costante è un termine
  - Ogni variabile è un termine
  - Se f è un simbolo di funzione e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine
- Esempi:
  - x
  - a
  - g(a)
  - f(x,g(a))

FORMULE

- Le formule consentono di costruire tutti gli enunciati dichiarativi
  - Se p è un simbolo di predicato a n argomenti e $t_1, \dots , t_n$ sono termini allora p($t_1, \dots , t_n$) è una formula. Se p non ha argomenti è detto formula atomica, quello che nel calcolo proposizionale è la proposizione elementare.
  - Se P è una formula allora $\sim P$ è una formula
  - Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \equiv Q$ sono formule
  - Se P è una formula e x una variabile allora $(\forall x.P)$ e $(\exists x.P)$ sono formule
  - Se P è una formula allora anche (P) è una formula

ESPRESSIVITÀ DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Tutti i multipli di 9 sono multipli di 3

  $(\forall x.\text{multiplo}(x,9) \Rightarrow \text{multiplo}(x,3))$
- C'è almeno un numero naturale che non è un numero primo

  $(\exists x.\text{naturale}(x) \wedge \sim\text{primo}(x))$
- Luigi ammira tutti coloro che suonano il pianoforte o il flauto

  $(\forall x.(\text{suona}(x,\text{pianoforte}) \vee \text{suona}(x,\text{flauto})) \Rightarrow \text{ammira}(\text{luigi}, x))$
- Hanno diritto allo sconto solo i pensionati e i bambini

  $(\forall x.\text{sconto}(x) \equiv (\text{pensionato}(x) \vee \text{bambino}(x))$

FORMULE APERTE E FORMULE CHIUSE

- Le formule in cui tutte le variabili sono introdotte da quantificatori sono dette formule chiuse.
- Le variabili che compaiono in una formula non quantificate sono dette libere e le formule che le contengono sono dette aperte.
- Il valore di verità di una formula aperta non è in generale determinabile data una interpretazione:

  es: pari(x), dove pari è interpretato come il predicato pari sui numeri naturali

IPOTESI SEMPLIFICATIVE

- Considerereremo solo formule chiuse
- In una formula una variabile compare in un solo quantificatore
- Quando componiamo con un connettivo due formule che contengono la stessa variabile provvedremo a ridenominarla con una fresca in una delle due.

SEMANTICA

- Il significato (**semantica**) di una formula è un valore di verità (come nel caso delle proposizioni)
- Restringendosi alle formule chiuse, la semantica dipende da una **interpretazione** che stabilisce il significato dei simboli che vi compaiono, ovvero
  - Il **dominio di interesse**
  - A quali elementi del dominio corrispondono i simboli in C (le costanti)
  - A quali funzioni sul dominio corrispondono i simboli in F
  - A quali predicati (proprietà o relazioni) corrispondono i simboli in P

ESEMPIO

- Consideriamo la formula:
  $(\forall x.p(x) \vee q(x))$
- Intepretazione1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa “essere maschio”
  - Il predicato q significa “essere femmina”
  - La formula è vera
- Interpretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa “essere numero primo”
  - Il predicato q significa “essere numero pari”
  - La formula è falsa

INTERPRETAZIONE PER ESEMPI (1)

- Una intepretazione consente di assegnare la semantica ad una formula:
  - Stabilendo direttamente il significato delle formule atomiche
  - Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte fino ad arrivare alla formula complessiva
  - Il procedimento non è diverso da quanto fatto per il calcolo proposizionale
  - È solo reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati

INTERPRETAZIONE PER ESEMPI (2)

- Sia
  - $C = \{a,b,c\}$
  - $F = \{\}$
  - $P = \{p\}$
- Interpretazione I_1
  - Le costanti sono Milano, Roma, Pontedera, corrispondenti a a,b,c
  - p(x) = T se x è capoluogo di provincia, F altrimenti
- Interpretazione I_2
  - Le costanti sono 5,10,15 corrispondenti a a,b,c
  - p(x) = T se x è multiplo di 5, F altrimenti

INTERPRETAZIONE PER ESEMPI (3)

- $C = \{a,b,c\}$, $F = \{\}$, $P = \{p\}$
- I_1: a = Milano, b = Roma, c = Pontedera, p(x) = capoluogo
- I_2: a = 5, b = 10, c = 15, p(x) = "x è multiplo di 5"

Formula	Valore in I_1	Valore in I_2
$p(a)$	T	T
$p(b)$	T	T
$p(c)$	F	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T
$(\exists x.p(x))$	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F

INTERPRETAZIONE PER ESEMPI (4)

- Consideriamo l'interpretazione I_3 in cui
  - Il dominio di interesse è quello di tutte le città italiane e le costanti a,b,c corrispondono a Milano, Roma, Napoli
  - $p(x) = T$ se x è capoluogo di provincia, F altrimenti

Formula	valore in I_3
$(\forall x.p(x))$	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T

INTERPRETAZIONE: DEFINIZIONE FORMALE

- Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissati C,F,V,P, una intepretazione è costituita da:
  - Un insieme D, detto dominio di intepretazione
  - Una funzione di associazione α che associa:
    - ad ogni costante c del linguaggio un elemento di D, rappresentato da α(c)
    - Ad ogni simbolo di funzione f ad n argomenti una funzione α(f) cha data una n-upla di elementi di D restituisce un elemento di D
    - Ad ogni simbolo di predicato p a zero argomenti (un atomo) un valore di verità
    - Ad ogni simbolo di predicato p a n argomenti una funzione che data una n-upla di elementi di D restituisce un valore di verità
  - Scriveremo $I = (D,\alpha)$

INTERPRETAZIONE: ESEMPIO

- Il linguaggio
  - $C = \{a\}$
  - $F = \{f\}$, a un argomento
  - $P = \{p\}$, a due argomenti
- L'interpretazione
  - $D = \aleph$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(a) = 0$
  - $\alpha(f) =$ successore: $(\alpha(f))(n) = n + 1$
  - $\alpha(p)$ è la relazione di maggiore sui naturali,

    $(\alpha(p))\ (7,5) = T$

    $(\alpha(p))\ (11,18) = F$

SEMANTICA DEI TERMINI CHIUSI

- Data un'interpretazione $I = (D,\alpha)$, la semantica di un termine chiuso t (ovvero senza variabili) è ottenuta con le due regole:
- (R1) se t è una costante c allora $\alpha(t)= \alpha(c)$
- (R2) se $t = f(t_1, \ldots ,t_n)$ e $\alpha(t_1) = d_1, \ldots , \alpha(t_n)=d_n$ allora $\alpha(t) =(\alpha(f))(d_1, \ldots ,d_n)$
- Considerando l'esempio precedente

$$\alpha(f(f(f(a))) = 3$$

SEMANTICA DEI TERMINI APERTI

- E' possibile dare semantica ad un termine aperto (contenente) variabili rispetto ad un **assegnamento**
- Un assegnamento è una funzione che associa ad ogni variabile in V un valore in D: $\rho: V \rightarrow D$
- Con $\rho[d/x]$ intendiamo l'assegnamento ρ modificato in modo tale che associ alla variabile x il valore d, ovvero

$$(\rho[d/x])(y) = d \qquad \text{se } x=y,$$

$$(\rho[d/x])(y) = \rho(y) \qquad \text{altrimenti}$$

- Es. se $D = \aleph$ e $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$ e $\rho' = \rho[15/z]$, allora $\rho'(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho'(z) = 15$

SEMANTICA DEI TERMINI APERTI (2)

- Data un'interpretazione $I = (D, \alpha)$ e un assegnamento $\rho: V \rightarrow D$, la semantica di un termine chiuso t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta con le tre regole:
- (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
- (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
- (R2) se $t = f(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(f))(d_1, \dots, d_n)$

SEMANTICA DELLE FORMULE ATOMICHE

- Diamo semantica a una formula atomica φ nell'intepretazione I sotto un assegnamento ρ, (in simboli $I_\rho(\varphi)$) con le seguenti regole per *induzione strutturale*:
- (S1) se $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $I_\rho(\varphi) = (\alpha(p))(d_1, \dots, d_n)$
  - caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione: $I_\rho(p) = \alpha(p)$
- (S2) se $\varphi = (P)$ allora $I\rho(\varphi) = I\rho(P)$,

  ovvero le parentesi hanno influenza solo sull'ordine di valutazione, ma non sul valore delle formule

SEMANTICA DEI CONNETTIVI

- (S3) $I_\rho(\sim P) = $ T se $I_\rho(P) = $ F, F se $I_\rho(P) = $ T
- (S4) $I_\rho(P \wedge Q) = $ T se $I_\rho(P) = $ T e $I_\rho(Q) = $ T,
  F altrimenti
- (S5) $I_\rho(P \vee Q) = $F se $I_\rho(P) = $ F e $I_\rho(Q) = $ F,
  T altrimenti
- (S6) $I_\rho(P \Rightarrow Q) = $ F se $I_\rho(P) = $ T e $I_\rho(Q) = $ F,
  T altrimenti
- (S7) $I_\rho(P \equiv Q) = $ T se $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$,
  F altrimenti

SEMANTICA DEI QUANTIFICATORI

- (S8) $I_\rho(\forall x.P)$ =

  T se $I_{\rho[d/x]}(P)$= T per qualunque d in *D*,

  F altrimenti
- (S9) $I_\rho(\exists x.P)$ =

  T se $I_{\rho[d/x]}(P)$= T per almeno un d in *D*,

  F altrimenti
- Nota bene: l'uso dell' assegnamento ρ è necessario perché bisogna far riferimento all'intero *D*, mentre le costanti del linguaggio potrebbero far riferimento solo ad un suo sottoinsieme.

MODELLI

- Sia I una interpretazione e φ una formula.
  Se φ è vera in I diciamo che I è un *modello* di φ e scriviamo
  $$I \models \varphi$$
- Se Γ è un insieme di formule con
  $$I \models \Gamma$$
  intendiamo che I è un modello per tutte le formule in Γ

- Se una formula è vera in almeno una interpretazione si dice che è *soddisfacibile* altrimenti è *insoddisfacibile*
- Se una formula è vera in tutte le interpretazioni si dice che è *valida* (estensione del concetto di tautologia) e scriviamo
  $$\models \varphi$$

ESEMPI

- Formula soddisfacibile

  p(a)

  Con $D = \aleph$

  a= 44

  p(x) = T se x è pari, F altrimenti

- Formula valida

  $(\forall x.p(x) \vee \sim p(x))$

- Formula insoddisfacibile

  $p(a) \wedge \sim p(a)$

CONSEGUENZA LOGICA

- Il concetto di conseguenza logica consente di *parametrizzare* la validità di una formula φ rispetto ad una teoria rappresentata da un insieme di formule Γ
- Diciamo che φ è una *conseguenza logica* di Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \varphi$$

se e soltanto se φ è vera in tutti i modelli di Γ,

ovvero tutte le interpretazioni che rendono vere le formule in Γ rendono vera anche φ

Esempi di formalizzazione: Il linguaggio della teoria degli insiemi

- Si vedano le Sezioni 8.2 e 9.4 della dispensa "Logica per la programmazione"