DIMOSTRAZIONI GENERALI

FORMALIZZAZIONE DEL SINGOLO PASSO

- Sia $conn \in \{\equiv, \Rightarrow, \Leftarrow\}$
- Il passo di dimostrazione

  P

  conn {G}

  Q

  è un modo intuitivo per esprimere che

  $G \Rightarrow (P\ conn\ Q)$ è una tautologia

- P

  $conn_1$ $\{G_1\}$

  Q

  $conn_2$ $\{G_2\}$

  R

- Corrisponde a

  $(G_1 \Rightarrow (P\ conn_1\ Q)) \land (G_2 \Rightarrow (Q\ conn_2\ R))$

OVVERO

- Poiché G_1 e G_2 sono tautologie
- $(G_1 \Rightarrow (P\ conn_1\ Q)) \wedge (G_2 \Rightarrow (Q\ conn_2\ R))$

$$\equiv$$

$$(P\ conn_1\ Q) \wedge (Q\ conn_2\ R)$$

- e se $conn_1$ e $conn_2$ sono lo stesso connettivo e il connettivo è transitivo (come lo sono $\equiv$ e $\Rightarrow$), dalla prova segue

$$P\ \ conn\ R,$$

come richiedeva la nostra intuizione

USO DELL'IPOTESI COME GIUSTIFICAZIONE

- Riassumendo: per dimostrare che da una ipotesi P segue una conseguenza Q, dimostriamo che
  - $P \Rightarrow Q$ è una tautologia
  - $\sim Q \Rightarrow \sim P$ è una tautologia
- Strategia alternativa: per dimostrare $P \Rightarrow Q$, partiamo da Q e cerchiamo di dimostrare che è vero sotto l'ipotesi, da usare come giustificazione in qualche passaggio, che P sia vero.
- Ricordiamoci infatti che il caso critico dell'implicazione è dimostrare che Q è vero quando P è vero. Quando P è falso … Tutti i gatti sono bigi.

ESEMPIO 1

- Teorema: $p \Rightarrow (p \wedge q \equiv q)$

- Prova: dimostriamo che $(p \wedge q \equiv q)$ è vera nell'ipotesi che p sia vera:

  $p \wedge q$

  $\equiv$ {**Ip**: $p \equiv T$}

  $T \wedge q$

  $\equiv$ {unità}

  q

ESEMPIO 2

- Teorema: $(P \Rightarrow (Q \equiv X)) \Rightarrow (P \wedge X \Rightarrow Q)$
- Prova: dimostriamo che vale $(P \wedge X \Rightarrow Q)$ sotto l'ipotesi che valga $(P \Rightarrow (Q \equiv X))$

$P \wedge X$

$\Rightarrow \{\mathbf{Ip}: P \Rightarrow (Q \equiv X)\}$

$(Q \equiv X) \wedge X$

$\equiv \quad \{\text{Elim-} \equiv\}$

$(Q \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow Q) \wedge X$

$\Rightarrow \{\textit{modus ponens}\}$

$(Q \Rightarrow X) \wedge Q$

$\Rightarrow \{\text{elim-} \wedge\}$

Q

IN CONCLUSIONE

Dato lo schema di dimostrazione:

$$
\begin{array}{ll}
r_1 & \\
\mathit{conn}_1 & \{G_1\} \\
r_2 & \\
\mathit{conn}_2 & \{G_2\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
r_{k-1} & \\
\mathit{conn}_{k-1} & \{G_{k-1}\} \\
r_k &
\end{array}
$$

esso rappresenta una dimostrazione della seguente tautologia:

$$(G_1 \Rightarrow (r_1\ \mathit{conn}_1\ r_2) \wedge (G_2 \Rightarrow (r_2\ \mathit{conn}_2\ r_3)) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (G_{k-1} \Rightarrow (r_{k-1}\ \mathit{conn}_{k-1}\ r_k))$$

- Supponiamo poi che le proprietà di $conn_1$ ...... $conn_{k-1}$, consentono di dimostrare $r_1\ conn\ r_k$

- Se le giustificazioni $G_1, \ldots, G_{k-1}$ sono tutte tautologie, allora abbiamo una dimostrazione di

$$r_1\ conn\ r_k$$

- Se le giustificazioni $G_{i_1}, \ldots, G_{i_h}$ non sono tautologie, ma ipotesi, allora abbiamo una dimostrazione di

$$G_{i_1} \wedge \ldots \wedge G_{i_h} \Rightarrow (r_1\ conn\ r_k)$$

- Se poi H implica (o è equivalente) alla congiunzione di tutte le ipotesi usate come giustificazioni, ovvero $H \Rightarrow G_{i_1} \wedge \ldots \wedge G_{i_h}$, abbiamo una prova di

$$H \Rightarrow (r_1\ conn\ r_k)$$

Ancora esempi...

- Dimostrare le seguenti tautologie usando giustificazioni non tautologiche

- $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \Rightarrow (r \vee s)$

  (Sillogismo disgiuntivo)

- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$

  (Sempl.-$\Rightarrow$)

ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

- Corrisponde all'uso della legge (ovvia tautologia)

$$(\sim p \Rightarrow F) \equiv p$$

- Se $p \equiv q \Rightarrow r$ la prova per assurdo diventa

$\sim(q \Rightarrow r) \Rightarrow F$

$\equiv$

$\sim(\sim q \vee r) \Rightarrow F$

$\equiv$

$(q \wedge \sim r) \Rightarrow F$

ESEMPIO: $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Prova per assurdo (errata sulla dispensa!)

$((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge \sim(p \Rightarrow r)$

$\equiv \quad \{\text{elim-} \Rightarrow \text{, DeMorgan}\}$

$(\sim(p \vee q) \vee r) \wedge (p \wedge \sim r)$

$\equiv \quad \{\text{DeMorgan}\}$

$((\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (p \wedge \sim r)$

$\equiv \quad \{\text{complemento}\}$

$((\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge \sim r)$

$\equiv \quad \{\text{contraddizione e zero}\}$

F

DIMOSTRAZIONE PER CASI

- Corrisponde all'uso della tautologia:

  $$((q \Rightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow p)) \equiv p$$

- Ovvero per dimostrare p è sufficiente provare le due implicazioni:
  - $q \Rightarrow p$
  - $\sim q \Rightarrow p$
- q e ~q costituiscono un contesto che facilita la dimostrazione.
- I due casi (q e ~q) insieme naturalmente garantiscono un contesto sempre vero.

ESEMPIO DI PROVA PER CASI

- $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- Caso q

$(p \vee q) \Rightarrow r$

$\Rightarrow$ {Ip: q, Zero}

$T \Rightarrow r$

$\equiv$ {Elim- $\Rightarrow$, Unità}

r

$\Rightarrow$ {Intro- $\vee$}

$\sim p \vee r$

$\Rightarrow$ {Elim- $\Rightarrow$}

$p \Rightarrow r$

- Caso ~q

$(p \vee q) \Rightarrow r$

$\Rightarrow$ {**Ip**: ~q ,Unità}

$p \Rightarrow r$

ESERCIZI

Occorrenze positive e negative: una regola più precisa

- p occorre *positivamente* in
  - p, sempre
  - $Q \vee R$, $Q \wedge R$ se compare *positivamente* in Q o in R
  - $\sim Q$ se compare *negativamente* in Q
  - $Q \Rightarrow R$ se compare *negativamente* in Q oppure compare *positivamente* in R
- p occorre *negativamente* in
  - $Q \vee R$, $Q \wedge R$ se compare *negativamente* in Q o in R
  - $\sim Q$ se compare *positivamente* in Q
  - $Q \Rightarrow R$ se compare *positivamente* in Q oppure compare *negativamente* in R

Come compare "p" in...?

- $\sim p \Rightarrow r$
- $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow r)$
- $\sim(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow s)$
- $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \;\; \Rightarrow (r \vee s)$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \;\; \Rightarrow q \wedge s)$
- $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o nessuna delle due?

- $(q \wedge p) \vee (q \wedge \sim p) \wedge (q \Rightarrow r)$
- $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p \wedge r)$
- $((\sim q \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q))) \Rightarrow r$

Formalizzazione di implicazioni in linguaggio naturale

- Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:
  - Se P, allora Q
  - P è una conseguenza di Q
  - P è condizione necessaria e sufficiente per Q
  - P è condizione necessaria per Q
  - P è condizione sufficiente per Q
  - P vale solo se vale Q
  - P vale se vale Q
  - P vale se e solo se vale Q