

DIMOSTRAZIONI GENERALI



FORMALIZZAZIONE DEL SINGOLO PASSO

- Sia $conn \in \{\equiv, \Rightarrow, \Leftarrow\}$
- Il passo di dimostrazione
P
 $conn \{G\}$
Q
è un modo intuitivo per esprimere che
 $G \Rightarrow (P \text{ conn } Q)$ è una tautologia
- P
 $conn_1 \{G_1\}$
Q
 $conn_2 \{G_2\}$
R
- Corrisponde a
 $(G_1 \Rightarrow (P \text{ conn}_1 Q)) \wedge (G_2 \Rightarrow (Q \text{ conn}_2 R))$



OVVERO

- Poiché G_1 e G_2 sono tautologie
- $(G_1 \Rightarrow (P \text{ conn}_1 Q)) \wedge (G_2 \Rightarrow (Q \text{ conn}_2 R))$

\equiv

$$(P \text{ conn}_1 Q) \wedge (Q \text{ conn}_2 R)$$

- e se conn_1 e conn_2 sono lo stesso connettivo e il connettivo è transitivo (come lo sono \equiv e \Rightarrow), dalla prova segue

$$P \text{ conn } R,$$

come richiedeva la nostra intuizione



USO DELL'IPOTESI COME GIUSTIFICAZIONE

- Riassumendo: per dimostrare che da una ipotesi P segue una conseguenza Q , dimostriamo che
 - $P \Rightarrow Q$ è una tautologia
 - $\sim Q \Rightarrow \sim P$ è una tautologia
- Strategia alternativa: per dimostrare $P \Rightarrow Q$, partiamo da Q e cerchiamo di dimostrare che è vero sotto l'ipotesi, da usare come giustificazione in qualche passaggio, che P sia vero.
- Ricordiamoci infatti che il caso critico dell'implicazione è dimostrare che Q è vero quando P è vero. Quando P è falso ... Tutti i gatti sono bigi.



ESEMPIO 1

- Teorema: $p \Rightarrow (p \wedge q \equiv q)$
- Prova: dimostriamo che $(p \wedge q \equiv q)$ è vera nell'ipotesi che p sia vera:

$$p \wedge q$$

$$\equiv \{\mathbf{Ip}: p \equiv T\}$$

$$T \wedge q$$

$$\equiv \{\text{unità}\}$$

$$q$$



ESEMPIO 2

- Teorema: $(P \Rightarrow (Q \equiv X)) \Rightarrow (P \wedge X \Rightarrow Q)$
- Prova: dimostriamo che vale $(P \wedge X \Rightarrow Q)$ sotto l'ipotesi che valga $(P \Rightarrow (Q \equiv X))$

$P \wedge X$

$\Rightarrow \{\mathbf{Ip}: P \Rightarrow (Q \equiv X)\}$

$(Q \equiv X) \wedge X$

$\equiv \{\text{Elim-} \equiv\}$

$(Q \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow Q) \wedge X$

$\Rightarrow \{\textit{modus ponens}\}$

$(Q \Rightarrow X) \wedge Q$

$\Rightarrow \{\text{elim-} \wedge\}$

Q



IN CONCLUSIONE

Dato lo schema di dimostrazione:

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \\ \text{conn}_1 \qquad \qquad \{G_1\} \\ \mathbf{r}_2 \\ \text{conn}_2 \qquad \qquad \{G_2\} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{r}_{k-1} \\ \text{conn}_{k-1} \qquad \{G_{k-1}\} \\ \mathbf{r}_k \end{array}$$

esso rappresenta una dimostrazione della seguente tautologia:

$$(G_1 \Rightarrow (\mathbf{r}_1 \text{ conn}_1 \mathbf{r}_2)) \wedge (G_2 \Rightarrow (\mathbf{r}_2 \text{ conn}_2 \mathbf{r}_3)) \wedge \dots \\ \dots \wedge (G_{k-1} \Rightarrow (\mathbf{r}_{k-1} \text{ conn}_{k-1} \mathbf{r}_k))$$



- Supponiamo poi che le proprietà di $conn_1 \dots conn_{k-1}$, consentono di dimostrare $r_1 conn r_k$
- Se le giustificazioni G_1, \dots, G_{k-1} sono tutte tautologie, allora abbiamo una dimostrazione di

$$r_1 conn r_k$$
- Se le giustificazioni G_{i_1}, \dots, G_{i_h} non sono tautologie, ma ipotesi, allora abbiamo una dimostrazione di

$$G_{i_1} \wedge \dots \wedge G_{i_h} \Rightarrow (r_1 conn r_k)$$
- Se poi H implica (o è equivalente) alla congiunzione di tutte le ipotesi usate come giustificazioni, ovvero $H \Rightarrow G_{i_1} \wedge \dots \wedge G_{i_h}$, abbiamo una prova di

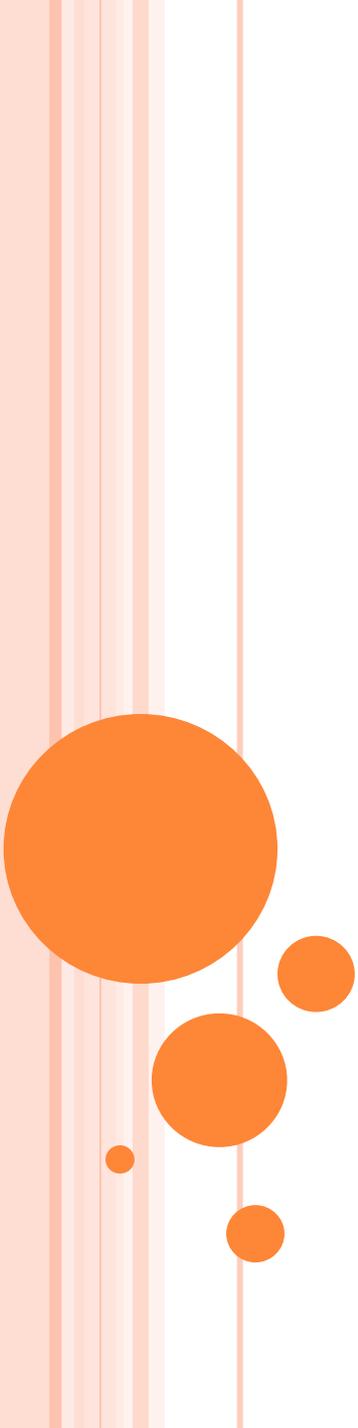
$$H \Rightarrow (r_1 conn r_k)$$



Ancora esempi...

- Dimostrare le seguenti tautologie usando giustificazioni non tautologiche
- $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \Rightarrow (r \vee s)$
(Sillo gismo disgiuntivo)
- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$
(Sempl.- \Rightarrow)





ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

- Corrisponde all'uso della legge (ovvia tautologia)

$$(\sim p \Rightarrow F) \equiv p$$

- Se $p \equiv q \Rightarrow r$ la prova per assurdo diventa

$$\sim(q \Rightarrow r) \Rightarrow F$$

\equiv

$$\sim(\sim q \vee r) \Rightarrow F$$

\equiv

$$(q \wedge \sim r) \Rightarrow F$$



ESEMPIO: $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Prova per assurdo (errata sulla dispensa!)

$$((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge \sim(p \Rightarrow r)$$

$$\equiv \{\text{elim-} \Rightarrow, \text{DeMorgan}\}$$

$$(\sim(p \vee q) \vee r) \wedge (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv \{\text{DeMorgan}\}$$

$$((\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$((\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv \{\text{contraddizione e zero}\}$$

F



DIMOSTRAZIONE PER CASI

- Corrisponde all'uso della tautologia:

$$((q \Rightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow p)) \equiv p$$

- Ovvero per dimostrare p è sufficiente provare le due implicazioni:
 - $q \Rightarrow p$
 - $\sim q \Rightarrow p$
- q e $\sim q$ costituiscono un contesto che facilita la dimostrazione.
- I due casi (q e $\sim q$) insieme naturalmente garantiscono un contesto sempre vero.



ESEMPIO DI PROVA PER CASI

○ $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

○ Caso q

$(p \vee q) \Rightarrow r$

$\Rightarrow \{Ip: q, Zero\}$

$T \Rightarrow r$

$\equiv \{Elim- \Rightarrow, Unit\}$

r

$\Rightarrow \{Intro- \vee\}$

$\sim p \vee r$

$\Rightarrow \{Elim- \Rightarrow\}$

$p \Rightarrow r$



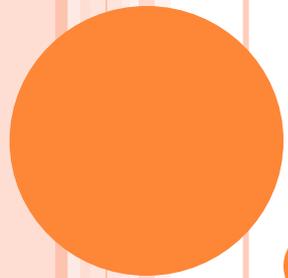
- Caso $\sim q$

$$(p \vee q) \Rightarrow r$$

$$\Rightarrow \quad \{\mathbf{Ip}: \sim q, \text{Unità}\}$$

$$p \Rightarrow r$$





ESERCIZI

Occorrenze positive e negative: una regola più precisa

- p occorre *positivamente* in
 - p, sempre
 - $Q \vee R$, $Q \wedge R$ se compare *positivamente* in Q o in R
 - $\sim Q$ se compare *negativamente* in Q
 - $Q \Rightarrow R$ se compare *negativamente* in Q oppure compare *positivamente* in R
- p occorre *negativamente* in
 - $Q \vee R$, $Q \wedge R$ se compare *negativamente* in Q o in R
 - $\sim Q$ se compare *positivamente* in Q
 - $Q \Rightarrow R$ se compare *positivamente* in Q oppure compare *negativamente* in R



Come compare "p" in...?

- $\sim p \Rightarrow r$
- $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow r)$
- $\sim(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow s)$
- $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \Rightarrow (r \vee s)$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$
- $p \Rightarrow q \Rightarrow r$



Le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o nessuna delle due?

- $(q \wedge p) \vee (q \wedge \sim p) \wedge (q \Rightarrow r)$
- $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p \wedge r)$
- $((\sim q \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q))) \Rightarrow r$



Formalizzazione di implicazioni in linguaggio naturale

- Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:
 - Se P , allora Q
 - P è una conseguenza di Q
 - P è condizione necessaria e sufficiente per Q
 - P è condizione necessaria per Q
 - P è condizione sufficiente per Q
 - P vale solo se vale Q
 - P vale se vale Q
 - P vale se e solo se vale Q

