UTILIZZO DEL MODUS PONENS NELLE DIMOSTRAZIONI

FORMATO DELLE DIMOSTRAZIONI

- Nelle dimostrazioni viste finora, ogni passo mostra l'equivalenza di due proposizioni usando:
  - una legge (equivalenza tautologica), come giustificazione
  - (eventualmente) il principo di sostituzione
- Con il **Modus Ponens** possiamo costruire dimostrazioni in cui un passo è **un'implicazione** usando
  - un'**implicazione tautologica** come giustificazione
  - un opportuno principio di sostituzione, che vedremo

EQUIVALENZA E MODUS PONENS

- Posso impostare la dimostarazione che $r_1 \Rightarrow r_k$ così:

r_1

$\equiv$ {giustificazione$_1$}

…

$\equiv$ {giustificazione$_h$}

p

$\Rightarrow$ { $p \Rightarrow q$, modus ponens }

q

$\equiv$ {giustificazione$_{h+1}$}

…

$\equiv$ {giustificazione$_{k-1}$}

r_k

ESEMPIO - TOLLENDO PONENS

- Usando la legge $p \wedge q \Rightarrow q$ (Sempl-$\wedge$) possiamo dimostrare

  $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Tollendo Ponens)

$(p \vee q) \wedge \sim p$

$\equiv$ {distributività}

$(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv$ {contraddizione e unità}

$(q \wedge \sim p)$

$\Rightarrow$ {Sempl.-$\wedge$, modus ponens}

q

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER $\Rightarrow$ (1)

- Il principio di sostituzione stabilisce che se $p \equiv q$, allora $r \equiv r[q/p]$
- E' valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

  "Se $p \Rightarrow q$, allora $r \Rightarrow r[q/p]$" (???)

- In generale NO. Infatti:

$$\begin{array}{l} z \Rightarrow u \wedge v \\ \Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\ z \Rightarrow u \end{array}$$

OK

$$\cancel{\begin{array}{l} u \wedge v \Rightarrow z \\ \Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \} \\ u \Rightarrow z \end{array}}$$

NO!!!

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER $\Rightarrow$ (2)

- Diciamo che **p occorre *positivamente* in**

  p
  $p \vee q$
  $p \wedge q$
  $q \Rightarrow p$

- mentre **p occorre *negativamente* in**

  $\sim p$
  $p \Rightarrow q$ (si ricordi che $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$)

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER $\Rightarrow$ (2)

- Se abbiamo stabilito
  - $p \Rightarrow q$
  - p occorre *positivamente* in r

  allora vale

  $$r \Rightarrow r\,[q/p]$$

- Se abbiamo stabilito
  - $p \Rightarrow q$
  - p occorre *negativamente* in r

  allora vale

  $$r \Leftarrow r\,[q/p]$$

ESEMPI, ESEMPI, ESEMPI

- $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$ (Tollendo Tollens)

- $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q \wedge r)$
  $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q \vee r)$
  (Sempl.Destra-$\Rightarrow$)

- $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q \Rightarrow r)$
  $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q \Rightarrow r)$
  (Sempl.Sinistra-$\Rightarrow$)

- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$ (Sempl.-$\Rightarrow$)

FORME NORMALI

- Forma normale congiuntiva

  $(p_1 \vee p_2 \vee \dots) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots) \wedge \dots\dots$

- Forma normale disgiuntiva

  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots) \vee \dots\dots$

- Possono essere usate per dimostrare l'equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti.

RISOLUZIONE

- $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ (Risoluzione)

$((p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

$\equiv$ {Elim- $\Rightarrow$, 2 volte}

$(\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$

$\Rightarrow$ {Transitività- $\Rightarrow$ }

$\sim q \Rightarrow r)$

$\equiv$ {Elim- $\Rightarrow$ }

$q \vee r$

ESEMPIO

- La mia *conoscenza*:
- *regole*
  - $r \Rightarrow p$
  - $q \Rightarrow r$
- *fatti*
  - r
  - q
- Vorrei provare che p è una *conseguenza logica* della mia conoscenza
- *Strategia*: faccio vedere che aggiungendo ~p alla mia conoscenza cado in contraddizione
- Uso la risoluzione per applicare le regole

CALCOLO

$(r \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge r \wedge q \wedge \sim p$

$\equiv$ {Elim.- $\Rightarrow$, 2 volte}

$\underline{(\sim r \vee p)} \wedge (\sim q \vee r) \wedge \underline{r} \wedge q \wedge \sim p$

$\Rightarrow$ {Risoluzione applicata ai fattori sottolineati (si noti che entrambi occorrono positivamente, e che $r \equiv r \vee F$)}

$p \wedge (\sim q \vee r) \wedge q \wedge \sim p$

$\equiv$ {Contraddizione}

$F \wedge (\sim q \vee r) \wedge q$

$\equiv$ {zero}

F

ESEMPI, ESEMPI, ESEMPI