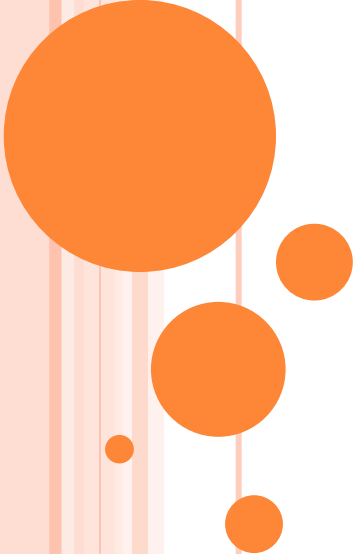




LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE

Franco Turini
turini@di.unipi.it

IPSE DIXIT

- Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa; in seguito, bisogna precisare che cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo ...

Aristotele

- La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento



- Si consideri la frase: *in un dato campione di pazienti, chi ha fatto uso di droghe pesanti ha utilizzato anche droghe leggere.*
- Quali delle seguenti osservazioni relative ai pazienti del campione si può dedurre da essa?
 - 1) Chi ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato anche droghe pesanti
 - 2) Chi non ha fatto uso di droghe leggere non ha utilizzato droghe pesanti
 - 3) Chi non ha fatto uso di droghe pesanti non ha utilizzato droghe leggere
 - 4) Chi non ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato droghe pesanti



- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
 - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - 1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - 2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - 3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - 4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno



FORMALIZZAZIONE DI DIMOSTRAZIONI

- Caso semplice: dimostrazioni di equivalenza (=)

E_1

$= \{\text{giustificazione}_1\}$

E_2

$= \{\text{giustificazione}_2\}$

.....

$= \{\text{giustificazione}_{n-1}\}$

E_n



PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

- Se $p=q$ allora una espressione r in cui a p è sostituito q (o viceversa) mantiene il suo valore
- In formule

$$r = r[q/p]$$

$$r = r_p^q$$



DIMOSTRAZIONI: COMINCIAMO DALLA ARITMETICA

$$(a+b)(a-b)$$

= {distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, ovvero, in formule, $(y+z)x = yx+zx$ applicata con a al posto di y , b al posto di z e $(a-b)$ al posto di x }

$$a(a-b)+b(a-b)$$

= {distributività della moltiplicazione rispetto alla sottrazione, due volte, ovvero, in formule, $x(y-z) = xy-xz$ applicata la prima volta con $x=a$, $y=a$, $z=b$ e la seconda con $x=b$, $y=a$, $z=b$ }

$$(aa-ab)+(ba-bb)$$

= {xx=x², e associatività dell'addizione}

$$a^2-ab+ba-b^2$$

= {commutatività della moltiplicazione, e $-x+x=0$ }

$$a^2+0-b^2$$

= {x+0=x}

$$a^2-b^2$$



IL CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI

- Le proposizioni (enunciati dichiarativi) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa” *Aristotele*



ESEMPI DI PROPOSIZIONI (IN ACCORDO ALLA INTERPRETAZIONE OVVIA)

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$



ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $X+1 = 2$



CONNETTIVI LOGICI

<i>Connettivo</i>	<i>Forma simbolica</i>	<i>Operazione corrispondente</i>
not	$\sim p$	negazione
and	$p \wedge q$	coniunzione
or	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza



SINTASSI (STRUTTURA) DELLE PROPOSIZIONI

$\text{Prop} ::= \text{Prop} \equiv \text{Prop} \mid \text{Prop} \wedge \text{Prop} \mid \text{Prop} \vee \text{Prop} \mid$

$\text{Prop} \Rightarrow \text{Prop} \mid \text{Prop} \Leftarrow \text{Prop} \mid$

$\text{Atom} \mid \sim \text{Atom}$

$\text{Atom} ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \text{Ide} \mid (\text{Prop})$

$\text{Ide} ::= p \mid q \mid \dots\dots$



PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

operatore	livello di precedenza
$\equiv$	0
$\Rightarrow, \Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3



SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \Leftarrow q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T



TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale T per qualunque valore T/F assegnato alle variabili proposizionali
 - Esempio: $p \vee \sim p$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale F per qualunque valore T/F assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi P è una tautologia se e solo se $\sim P$ è una contraddizione



Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- Diciamo che

p implica tautologicamente q

se e solo se

$p \Rightarrow q$ è una tautologia

p è tautologicamente equivalente a q

se e solo se

$p \equiv q$ è una tautologia

- La proprietà di essere una tautologia e il principio di sostituzione ci permettono di dimostrare implicazioni e equivalenze tautologiche



LEGGI

- Le leggi sono tautologie (dimostrabili p.e. con le tabelle di verità) utili per effettuare le dimostrazioni
- Leggi per $\equiv$

$p \equiv p$ (Riflessività)

$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (Simmetria)

$((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (Associatività)

$(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$ (Unità)

$((p \equiv q) \wedge (q \equiv r)) \Rightarrow (p \equiv r)$ (Transitività)



LEGGI PER CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

$p \vee q \equiv q \vee p$ (Commutatività)

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Associatività)

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee p \equiv p$ (Idempotenza)

$p \wedge p \equiv p$

$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ (Unità)

$p \vee \mathbf{F} \equiv p$

$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ (Zero)

$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributività)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$



ESEMPIO

Teorema: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

Prova:

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Commutatività} \} \\ & (q \vee p) \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & q \vee (p \vee (p \vee r)) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & q \vee ((p \vee p) \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Idempotenza} \} \\ & q \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & (q \vee p) \vee r \\ \equiv & \quad \{ \text{Commutatività} \} \\ & (p \vee q) \vee r \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & p \vee (q \vee r) \end{aligned}$$



COMMENTI

- La dimostrazione fatta usando le leggi (tautologie utili per trasformare proposizioni in proposizioni equivalenti) garantisce la correttezza della dimostrazione
- Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi.



LEGGI DI ASSORBIMENTO (1)

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (semantica) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T



LEGGI DI ASSORBIMENTO (2)

○ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)

○ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (calcolo) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$p \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Unità}\}$$

$$(p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Distributività}\}$$

$$p \vee (\mathbf{F} \wedge q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Zero}\}$$

$$p \vee \mathbf{F}$$

$$\equiv \quad \{\text{Unità}\}$$

$$p$$



LEGGI DELLA NEGAZIONE

$\sim(\sim p) \equiv p$ (Doppia negazione)

$p \vee \sim p \equiv \mathbf{T}$ (Terzo escluso)

$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}$ (Contraddizione)

$\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$ (De Morgan)

$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$

$\sim \mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$ (T:F)

$\sim \mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$



LEGGI DEL COMPLEMENTO (1)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (semantica) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

p	q	$\sim p$	$(p \vee q)$	$(\sim p \wedge q)$	$p \vee (\sim p \wedge q)$
F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T



LEGGI DEL COMPLEMENTO (2)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (calcolo) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

$$p \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Distributività}\}$$

$$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Terzo escluso}\}$$

$$\mathbf{T} \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Unità}\}$$

$$(p \vee q)$$



LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (1)

- $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (elim- $\Rightarrow$)

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T



LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (2)

- $(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (elim- $\equiv$)
- $(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (elim- $\Leftarrow$)
- Tutte le tautologie del calcolo proposizionale sono derivabili dall'insieme delle leggi visto
- Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre leggi derivate che corrispondono ad associate tecniche di dimostrazione.



Insiemi funzionalmente completi di connettivi logici

- Abbiamo introdotto 5 connettivi logici:

<i>Connettivo</i>	<i>Forma simbolica</i>	<i>Operazione corrispondente</i>
not	$\sim p$	negazione
and	$p \wedge q$	congiunzione
or	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza

- Alcuni possono essere definiti in termini di altri. Molti sottoinsiemi sono "funzionalmente completi", cioè permettono di derivare tutti gli altri.
- Esercizio:** Mostrare che $\{\wedge, \sim\}$, $\{\vee, \sim\}$ e $\{\Rightarrow, \sim\}$ sono funzionalmente completi



LEGGI DERIVATE

- $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (modus ponens)
- $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (contrapposizione)
- $(p \Rightarrow \sim p) \equiv \sim p$ (reductio ad absurdum)
- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitività)



CORRETTEZZA DEL MODUS PONENS

$$\begin{aligned} & (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \\ \equiv & \quad \{ \text{Elim-} \Rightarrow \} \\ & \sim(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q \\ \equiv & \quad \{ \text{Elim-} \Rightarrow \} \\ & \sim(p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q \\ \equiv & \quad \{ \text{DeMorgan} \} \\ & \sim p \vee \sim(\sim p \vee q) \vee q \\ \equiv & \quad \{ \text{DeMorgan} \} \\ & \sim p \vee (\sim \sim p \wedge \sim q) \vee q \\ \equiv & \quad \{ \text{Complemento} \} \\ & \sim p \vee \sim q \vee q \\ \equiv & \quad \{ \text{TerzoEscluso} \} \\ & \sim p \vee \mathbf{T} \\ \equiv & \quad \{ \text{Zero} \} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$



ESERCIZI DEL TEST (1)

- Si consideri la frase: *in un dato campione di pazienti, chi ha fatto uso di droghe pesanti ha utilizzato anche droghe leggere.*
- Formalizziamo l'enunciato.
 - Introduciamo due "identificatori"(nomi) per le proposizioni nella frase:
 - dp= fare uso di droghe pesanti.
 - dl = fare uso di droghe leggere
- Quindi la frase dice: $dp \Rightarrow dl$



ESERCIZI DEL TEST (1)

- *Quali delle seguenti osservazioni relative ai pazienti del campione si può dedurre da essa?*
- Formalizziamole:
 - 1) Chi ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato anche droghe pesanti $dl \Rightarrow dp$
 - 2) Chi non ha fatto uso di droghe leggere non ha utilizzato droghe pesanti $\sim dl \Rightarrow \sim dp$
 - 3) Chi non ha fatto uso di droghe pesanti non ha utilizzato droghe leggere $\sim dp \Rightarrow \sim dl$
 - 4) Chi non ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato droghe pesanti $\sim dl \Rightarrow dp$



ESERCIZI DEL TEST (1)

- *Quali delle seguenti osservazioni relative ai pazienti del campione si può dedurre da essa?*
- Per ognuna delle osservazioni, vediamo se è una conseguenza tautologica della premessa $dp \Rightarrow dl$. Quindi vediamo quali delle seguenti sono tautologie:

- 1) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (dl \Rightarrow dp)$
- 2) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dl \Rightarrow \sim dp)$
- 3) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dp \Rightarrow \sim dl)$
- 4) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dl \Rightarrow dp)$



ESERCIZI DEL TEST (1)

- Per vedere se sono tautologie, possiamo cercare di dimostrare che sono equivalenti a T.

Sfruttando l'intuizione, vediamo che :

- 1) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (dl \Rightarrow dp)$ non è tautologia:
sia $dl = T$, $dp = F$
- 2) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dl \Rightarrow \sim dp)$ è tautologia:
usiamo controposizione e eliminazione di $\equiv$
- 3) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dp \Rightarrow \sim dl) \dots$
- 4) $(dp \Rightarrow dl) \Rightarrow (\sim dl \Rightarrow dp) \dots$



ESERCIZI DEL TEST (2)

- Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio
 - $\text{Corrado} \Rightarrow \text{Antonio}$
- Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno
 - $\text{Antonio} \Rightarrow \text{Bruno}$

$(\text{Corrado} \Rightarrow \text{Antonio}) \wedge (\text{Antonio} \Rightarrow \text{Bruno})$

$\Rightarrow \quad \{\text{transitività}\}$

$\text{Corrado} \Rightarrow \text{Bruno}$

