Corso di Laurea in Informatica A.A. 2009/2010
Logica per la Programmazione
Terzo appello - Venerdi' 4 giugno 2010

Soluzioni proposte dai docenti

---

a) Si provi che la seguente formula del calcolo proposizionale è una tautologia:

$$\mathbf{R \wedge ((P \wedge Q) \vee \sim R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)}$$

Soluzione (1)

$R \wedge ((P \wedge Q) \vee \sim R)$

$\equiv$ { eliminazione-$\Rightarrow$, al contrario }

$R \wedge (R \Rightarrow P \wedge Q)$

$\Rightarrow$ { Modus Ponens }

$P \wedge Q$

$\Rightarrow$ { Semplificazione $\wedge$ }

Q

$\Rightarrow$ { Introduzione $\vee$ }

$\sim P \vee Q$

$\equiv$ { eliminazione-$\Rightarrow$, al contrario }

$P \Rightarrow Q$

Soluzione (2)

$R \wedge ((P \wedge Q) \vee \sim R)$

$\equiv$ { distributivita' }

$(R \wedge P \wedge Q) \vee (R \wedge \sim R)$

$\equiv$ { contraddizione, unita' }

$R \wedge P \wedge Q$

$\Rightarrow$ { Semplificazione $\wedge$ }

Q

$\Rightarrow$ { Introduzione $\vee$ }

$\sim P \vee Q$

$\equiv$ { eliminazione-$\Rightarrow$, al contrario }

$P \Rightarrow Q$

---

b) Si provi che la seguente formula della logica del primo ordine è valida, dove P e R contengono la variabile libera x:

$$\mathbf{(\forall x . P) \wedge \sim (\exists x. P \wedge \sim R) \Rightarrow (\exists x . R)}$$

Soluzione:

$(\forall x . P) \wedge \sim (\exists x. P \wedge \sim R)$

$\equiv$ { De Morgan }

$(\forall x . P) \wedge (\forall x. \sim P \vee R)$

$\equiv$ { $\forall$:$\wedge$ }

$(\forall x . P \wedge (\sim P \vee R))$

$\equiv$ { Complemento }

$(\forall x . P \wedge R)$

$\Rightarrow$ { Semplificazione-$\wedge$ }

$(\forall x . R)$

$\Rightarrow$ { Eliminazione-$\forall$, d costante del linguaggio }

$R[d/x]$

$\Rightarrow$ { Introduzione-$\exists$ }

$(\exists x. R)$

---

c) Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo,

indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:

"Se non gioca Milito nell'Argentina almeno una squadra la sconfigge"

Soluzione: **Dominio**: squadre di calcio e giocatori.
Predicati: gioca(x, y) "x gioca nella squadra y", vince(x, y) "la squadra x batte la squadra y"
Costanti: Milito "il giocatore Milito", Argentina "la squadra nazionale dell'Argentina"

Formula: $\sim$**gioca(Milito, Argentina)** $\Rightarrow$ **($\exists$z. vince(z, Argentina))**

---

d) Assumendo che a : array [0, n) of nat, si formalizzi il seguente enunciato:

" la somma degli elementi dell'array a di posizione pari è maggiore

della somma degli elementi di a di posizione dispari "

Soluzione: $(\Sigma\, i : i \in [0,n) \wedge i \,\%\, 2 = 0 \,.\, a[\,i\,]\,) > (\Sigma\, i : i \in [0,n) \wedge i \,\%\, 2 = 1 \,.\, a[\,i\,]\,)$

---

e) Si dimostri la correttezza della seguente tripla:

{ a = b }
x := a ;
y := x ;
x := b
{ x = y }

Soluzione: Per la regola della sequenza basta trovare due formule R1 e R2 tali che le seguenti triple siano verificate:
(1) { a = b } x := a { R1 }
(2) { R1 } y := x { R2 }
(3) { R2 } x := b { x = y }
Applicando l'assioma dell'assegnamento a (3) otteniamo che la tripla è soddisfatta per
$R2 \equiv (x = y)[x/b] \wedge def(b)$
Semplificando, otteniamo $R2 \equiv (b = y)$. Applicando a (2) e a questo valore di R2 l'assioma dell'assegnamento, otteniamo che la tripla (2) è soddisfatta per
$R1 \equiv R2[x/y] \wedge def(x) \equiv (b = y)[x/y] \wedge def(x) \equiv (b = x)$
Applicando a (1) l'assioma dell'assegnamento e la regola (pre) con questo valore di R1, otteniamo che la tripla (1) è soddisfatta se la seguente implicazione è valida:
$a = b \Rightarrow (b = x)[a/x] \wedge def(a)$ cioè $a = b \Rightarrow (b = a)$
che è banalmente vera.

---

f) Si dimostri la correttezza della seguente tripla, assumendo che a : array [0, n) of nat:

$\{ \; i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$
if (i % 2 = 1)
then sum := sum + a[i]
else skip
fi ;
i := i + 1
$\{ sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$

Soluzione: Per la regola della sequenza bisogna trovare una formula R tale che le seguenti triple siano verificate:

(1) $\{ \; i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$
if (i % 2 = 1)
then sum := sum + a[i]
else skip
fi
{ R }

(2) { R } i := i + 1 $\{ sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$

Applicando l'assioma dell'assegnamento a (2) otteniamo che la tripla è soddisfatta per

$R \equiv (sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]))[i + 1 / i] \wedge def(i + 1)$ cioè
$R \equiv (sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]))$

Con questo valore per R, per verificare la tripla (1) usando la regola del condizionale, dobbiamo dimostrare la seguente formula (a) e verificare le seguenti triple (b) e (c):

(a) $i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \Rightarrow def(i \% 2 = 1)$

(b) $\{ i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \wedge (i \% 2 = 1) \}$
sum := sum + a[i]
$\{ sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$

(c) $\{ i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \wedge (i \% 2 \neq 1) \}$
skip
$\{ sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \}$

Per l’implicazione (a) abbiamo:

def(i % 2 = 1)
$\equiv$ { definizione di def, calcolo }
$2 \neq 0$
$\equiv$ { calcolo }
T

Per (b), usando l'assioma dell'assegnamento e la regola (pre), è sufficiente dimostrare:

(b') $(i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \wedge (i \% 2 = 1)) \Rightarrow$
$(sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]))[sum + a[i] / sum] \wedge def(sum + a[i]))$

Vediamolo, partendo dalla conseguenza:

$sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]))[sum + a[i] / sum] \wedge def(sum + a[i])$
$\equiv$ { applicazione di sostituzione, definizione di *def()*, unità }
$sum + a[i] = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) \wedge i \in [0, n)$
$\equiv$ { Legge dell'intervallo per Σ, Ip: $(i \% 2 = 1) \wedge i \in [0, n)$ }
$sum + a[i] = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j]) + a[i]$
$\equiv$ { Ip: $sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 \,.\, a[j])$, calcolo }
T

Per (c), usando l'assioma (skip) e la regola (pre), è sufficiente dimostrare:

$(i \in [0, n) \wedge sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 . a[j]) \wedge (i \% 2 \neq 1))$

$\Rightarrow (sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 . a[j]))$

Infatti, partendo dalla conseguenza abbiamo:

$sum = (\Sigma j : j \in [0, i] \wedge j \% 2 = 1 . a[j])$

$\equiv$ { Legge dell'intervallo per Σ, Ip: $(i \% 2 \neq 1)$ }

$sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 . a[j])$

$\equiv$ { Ip: $sum = (\Sigma j : j \in [0, i) \wedge j \% 2 = 1 . a[j])$ }

T