Corso di Laurea in Informatica A.A. 2009/2010
Logica per la Programmazione
Primo Compitino del 4 novembre 2009
Soluzioni proposte dai docenti

a) Si provi che le seguenti formule proposizionali sono tautologie:

1. $((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)) \equiv ((P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q))$

$(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$
$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$, 2 volte}
$(\sim P \vee Q) \vee (\sim R \vee S)$
$\equiv$ {Assoc-$\vee$, Comm-$\vee$}
$(\sim P \vee S) \vee (\sim R \vee Q)$
$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$, 2 volte}
$(P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$

Quindi abbiamo dimostrato $((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)) \equiv ((P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q))$

---

2. $(P \wedge Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow R)$
$\Rightarrow$ {Simpl-$\wedge$, Modus Ponens}
$(P \wedge Q)$
$\Rightarrow$ {Simpl-$\wedge$, Modus Ponens}
P
$\Rightarrow$ {Intro-$\vee$, Modus Ponens}
$P \vee R$

Quindi abbiamo dimostrato $(P \wedge Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \vee R$

---

b) Usando come ipotesi

$(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$,

dimostrare per casi su Q che vale

$(P \Rightarrow \sim Q \vee S)$

Caso $Q \equiv T$

P
$\equiv$ {Ip: $Q \equiv T$, unita'}
$P \wedge Q$
$\Rightarrow$ {Ip: $(P \wedge Q) \Rightarrow R$, Modus Ponens}
R
$\Rightarrow$ {Ip: $R \Rightarrow S$, Modus Ponens}
S
$\Rightarrow$ {Intro-$\vee$, Modus Ponens}
$\sim Q \vee S$

Quindi, nell'ipotesi che $Q \equiv T$, abbiamo dimostrato

$$(((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)) \Rightarrow (P \Rightarrow \sim Q \vee S).$$

Caso $Q \equiv F$

$P \Rightarrow \sim Q \vee S$
$\equiv$ {Ip: $Q \equiv F$, T:F}
$P \Rightarrow T \vee S$
$\equiv$ {Zero}
$P \Rightarrow T$
$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$, Zero}
T

Quindi, nell'ipotesi che $Q \equiv F$, abbiamo dimostrato $P \Rightarrow \sim Q \vee S$.
Complessivamente, abbiamo dimostrato che

$$(((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)) \Rightarrow (P \Rightarrow \sim Q \vee S).$$

---

c) Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:

1. Piove, ma non fa freddo se ci si copre

$\text{Piove}() \wedge (\text{CiSiCopre}() \Rightarrow \sim \text{FaFreddo}())$

Interpretazione:
Piove(), CiSiCopre() e FaFreddo() sono predicati senza argomenti.
(Equivalentemente possono essere visti come variabili proposizionali, scrivendoli senza parentesi, e considerando la formula nel Calcolo Proposizionale.)
Non essendoci variabili, non c'e' bisogno di fissare *un dominio* di interpretazione. I predicati possono essere interpretati nel modo ovvio: Piove() $\equiv$ "sta piovendo", CiSiCopre() = "ci si copre" e FaFreddo = "si ha freddo".
La formula esplicita il significato delle congiunzioni "ma" e "se" dell'asserzione.

---

2. Il doppio di un numero naturale è sempre pari

$(\forall x. Pari(Doppio(x))$

$(\forall x. (\exists\, y.\ x = Doppio(y)) \Rightarrow Pari(x))$

Interpretazione:
Dominio**:** numeri naturali
Doppio(x): funzione unaria: restituisce "il doppio di x"
Pari(x): predicato unario: "x e' un numero pari"

---

3. Due persone sono parenti se hanno un antenato comune

$(\forall\ x, y. (\exists\ z. Antenato(z,x) \wedge Antenato(z,y)) \Rightarrow Parenti(x,y))$

$(\forall\ x, y, z.\ \ Antenato(z,x) \wedge Antenato(z,y) \Rightarrow Parenti(x,y))$

Interpretazione:
Dominio**:** persone
Antenato(x,y): predicato binario: "x e' antenato di y"
Parenti(x,y): predicato binario: "x e y sono parenti"
