



Un'introduzione al corso di LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE

Pisa, 14 e 16 settembre 2010

Andrea Corradini

andrea@di.unipi.it

LOGICA

- La **LOGICA** è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

“Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo...”

Aristotele

- Esempio di *sillogismo*:
 - Tutti gli uomini sono mortali
 - Socrate è un uomo
 - Socrate è mortale



○ Ma non tutti i sillogismi sono validi:

- Tutti gli animali sono mortali
 - Pippo è mortale
 - Pippo è un animale
-
- Tutti gli dei sono immortali
 - Gli uomini non sono dei
 - Gli uomini sono mortali



DALLA LOGICA ALLA LOGICA MATEMATICA

- Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (*George Boole, Augustus de Morgan, ...*)
- Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali (studiate negli anni 1900-25)
- In matematica, la logica è usata principalmente per
 - esprimere asserti in modo non ambiguo:
“tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”
 $(\forall n. n \in \mathbb{N} \wedge \text{pari}(n) \wedge n > 2 \Rightarrow \sim \text{primo}(n))$
 - chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione



LOGICA MATEMATICA E INFORMATICA

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
 - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
 - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica
- Usi della Logica Matematica in Informatica:
 - formalizzazione di requisiti
 - dimostrazione di proprietà di programmi (es: Hoare)
 - fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
 - fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
 - Model checking
 - Theorem proving



UN PROBLEMA DI DEDUZIONE LOGICA

(da un test d'ingresso)

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
 - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - 1) Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - 2) Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - 3) Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - 4) Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*



IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- E' il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni (enunciati dichiarativi)* sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- “dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa”

Aristotele



ESEMPI DI PROPOSIZIONI “ATOMICHE”

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$



ESEMPI DI NON PROPOSIZIONI

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $X+1 = 2$



CONNETTIVI LOGICI

<i>Connettivo</i>	<i>Forma simbolica</i>	<i>Operazione corrispondente</i>
not	$\sim p$	negazione
and	$p \wedge q$	congiunzione
or	$p \vee q$	disgiunzione
se p allora q	$p \Rightarrow q$	implicazione
p se e solo se q	$p \equiv q$	equivalenza
p se q	$p \Leftarrow q$	conseguenza



SINTASSI DELLE PROPOSIZIONI (GRAMMATICA)

Prop ::=

Prop \equiv Prop | Prop \wedge Prop | Prop \vee Prop |

Prop \Rightarrow Prop | Prop \Leftarrow Prop |

Atom | \sim Atom

Atom ::=

T | **F** | Ide | (Prop)

Ide ::=

p | q | ...



SEMANTICA (SIGNIFICATO) DELLE PROPOSIZIONI

- Tabelle di verità dei connettivi logici:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \Leftarrow q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

- Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)



CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
 - *Introduciamo tre proposizioni:*
 - **A** \equiv “Antonio va al cinema”
 - **B** \equiv “Bruno va al cinema”
 - **C** \equiv “Corrado va al cinema”
- Si sa che:
 - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
 - **C** \Rightarrow **A**
 - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
 - **A** \Rightarrow **B**



CALCOLO PROPOSIZIONALE PER FORMALIZZARE ENUNCIATI: ESEMPIO

- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
 - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - $C \Rightarrow B$
 - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - $\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$
 - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - $B \Rightarrow C$
 - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
 - $\sim C \Rightarrow \sim B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti



TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
 - Esempio: $p \vee \sim p$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\sim P$ è una contraddizione



IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE TAUTOLOGICHE

- Diciamo che

p implica tautologicamente q

se e solo se

$p \Rightarrow q$ è una tautologia

p è tautologicamente equivalente a q

se e solo se

$p \equiv q$ è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?



DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGICHE

- Per dimostrare che p è una tautologia possiamo
 - Usare le tabelle di verità
 - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p
 - Cercare di costruire una dimostrazione
 - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
 - Usando opportune *regole di inferenza*
 - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
 - Mostrare che non è una tautologia
 - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p
- Ma come è strutturata una dimostrazione?



DIMOSTRAZIONI: COMINCIAMO DALL'ARITMETICA

- Mostriamo che $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+b)(a-b)$$

= {distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, ovvero, in formule, $(y+z)x = yx+zx$ applicata con a al posto di y , b al posto di z e $(a-b)$ al posto di x }

$$a(a-b)+b(a-b)$$

= {distributività della moltiplicazione rispetto alla sottrazione, due volte, ovvero, in formule, $x(y-z) = xy-xz$ applicata la prima volta con $x=a$, $y=a$, $z=b$ e la seconda con $x=b$, $y=a$, $z=b$ }

$$(aa-ab)+(ba-bb)$$

= { $xx=x^2$, e associatività dell'addizione}

$$a^2-ab+ba-b^2$$

= {commutatività della moltiplicazione, e $-x+x=0$ }

$$a^2+0-b^2$$

= { $x+0=x$ }

$$a^2-b^2$$



STRUTTURA DI UNA SEMPLICE DIMOSTRAZIONE

- Nella dimostrazione vista abbiamo
 - una sequenza di eguaglianze
 - ogni eguaglianza ha come giustificazione una o più *leggi*
- La correttezza di ogni eguaglianza è basata su una *regola di inferenza*: il principio di sostituzione

“Se $p = q$ allora una espressione r in cui a p è sostituito q (o viceversa) mantiene il suo valore”

In formule, $r = r[q/p]$ o $r = r_p^q$

- Qui $p=q$ è una legge, e $r = r[q/p]$ è l'eguaglianza da essa giustificata



LEGGI

- Le leggi sono tautologie (dimostrabili p.e. con le tabelle di verità) utili per effettuare le dimostrazioni
- Leggi per \equiv

$p \equiv p$ (Riflessività)

$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (Simmetria)

$((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (Associatività)

$(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$ (Unità)

$((p \equiv q) \wedge (q \equiv r)) \Rightarrow (p \equiv r)$ (Transitività)



LEGGI PER CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

$p \vee q \equiv q \vee p$ (Commutatività)

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Associatività)

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee p \equiv p$ (Idempotenza)

$p \wedge p \equiv p$

$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ (Unità)

$p \vee \mathbf{F} \equiv p$

$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ (Zero)

$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributività)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$



DIMOSTRAZIONI DI EQUIVALENZE IN CALCOLO PROPOSIZIONALE

- La struttura è analoga a quelle di equazioni algebriche

$$\begin{aligned} & P_1 \\ \equiv & \{ \text{giustificazione}_1 \} \\ & P_2 \\ \equiv & \{ \text{giustificazione}_2 \} \\ & \dots\dots\dots \\ \equiv & \{ \text{giustificazione}_{n-1} \} \\ & P_n \end{aligned}$$

- Le giustificazioni sono leggi (tautologie)
- Ogni passo è corretto per il *Principio di Sostituzione*



UN SEMPLICE ESEMPIO

Teorema: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Commutatività} \} \\ & (q \vee p) \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & q \vee (p \vee (p \vee r)) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & q \vee ((p \vee p) \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Idempotenza} \} \\ & q \vee (p \vee r) \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & (q \vee p) \vee r \\ \equiv & \quad \{ \text{Commutatività} \} \\ & (p \vee q) \vee r \\ \equiv & \quad \{ \text{Associatività} \} \\ & p \vee (q \vee r) \end{aligned}$$



COMMENTI

- La dimostrazione fatta usando le leggi (tautologie utili per trasformare proposizioni in proposizioni equivalenti) garantisce la correttezza della dimostrazione
- Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi.



LEGGI DELLA NEGAZIONE

$\sim(\sim p) \equiv p$ (Doppia negazione)

$p \vee \sim p \equiv \mathbf{T}$ (Terzo escluso)

$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}$ (Contraddizione)

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (De Morgan)

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim\mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$ (**T:F**)

$\sim\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$



LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (1)

- $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (elim- \Rightarrow)

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T



LEGGI DELL'IMPLICAZIONE (2)

- $(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (elim- \equiv)
- $(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (elim- \Leftarrow)

- Commenti:
 - Tutte le tautologie del calcolo proposizionale sono derivabili dall'insieme delle leggi visto
 - Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre leggi derivate che corrispondono ad associate tecniche di dimostrazione.



TORNIAMO ALL'ESEMPIO DAL TEST

○ **Premesse:**

- Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; ($C \Rightarrow A$)
- Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. ($A \Rightarrow B$)

○ **Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:**

- Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
 - ($C \Rightarrow B$)
- Nessuno dei tre amici è andato al cinema
 - ($\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$)
- Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
 - ($B \Rightarrow C$)
- Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
 - ($\sim C \Rightarrow \sim B$)



COME POSSIAMO ESSERE CERTI DELLA RISPOSTA?

- Basta determinare quale delle seguenti formule è una tautologia:

1) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$

2) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C)$

3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

4) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\sim C \Rightarrow \sim B)$

- Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.



ESEMPIO: DIMOSTRAZIONE CHE (1) E' UNA TAUTOLOGIA

$$\begin{aligned} & ((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B) \\ \equiv & \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (C \Rightarrow B) \\ \equiv & \sim((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B) \\ \equiv & (\sim(C \Rightarrow A) \vee \sim(A \Rightarrow B)) \vee (\sim C \vee B) \\ \equiv & (\sim(\sim C \vee A) \vee \sim(\sim A \vee B)) \vee (\sim C \vee B) \\ \equiv & ((C \wedge \sim A) \vee (A \wedge \sim B)) \vee (\sim C \vee B) \\ \equiv & ((C \wedge \sim A) \vee \sim C) \vee ((A \wedge \sim B) \vee B) \\ \equiv & ((C \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee B)) \\ \equiv & (T \wedge (\sim A \vee \sim C)) \vee ((A \vee B) \wedge T) \\ \equiv & (\sim A \vee \sim C) \vee (A \vee B) \\ \equiv & (T \vee \sim C \vee B) \\ \equiv & T \end{aligned}$$



LEGGI DI ASSORBIMENTO (1)

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (semantica) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T



LEGGI DI ASSORBIMENTO (2)

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Assorbimento)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Prova (calcolo) di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$\begin{aligned} & p \wedge (p \vee q) \\ \equiv & \quad \{\text{Unità}\} \\ & (p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q) \\ \equiv & \quad \{\text{Distributività}\} \\ & p \vee (\mathbf{F} \wedge q) \\ \equiv & \quad \{\text{Zero}\} \\ & p \vee \mathbf{F} \\ \equiv & \quad \{\text{Unità}\} \\ & p \end{aligned}$$



LEGGI DEL COMPLEMENTO (1)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (semantica) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

p	q	$\sim p$	$(p \vee q)$	$(\sim p \wedge q)$	$p \vee (\sim p \wedge q)$
F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T



LEGGI DEL COMPLEMENTO (2)

- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Prova (calcolo) di $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

$$p \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Distributività}\}$$

$$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Terzo escluso}\}$$

$$\mathbf{T} \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \quad \{\text{Unità}\}$$

$$(p \vee q)$$



ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze
(del tipo $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$) usando una catena di equivalenze:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{q}$$

- Se la formula \mathbf{p} da dimostrare non è un'equivalenza, si può mostrare equivalente a \mathbf{T} : $\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$

- Se la formula è del tipo $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, si può dimostrare usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \Rightarrow \dots \equiv \dots \Rightarrow \mathbf{q}$$

usando per giustificazioni, equivalenze o implicazioni tautologiche



ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Si possono usare altre tecniche di dimostrazione (che conosciamo dalla scuola).
- Queste tecniche possono essere schematizzate come opportune tautologie

- Esempi:

- Dimostrazione per assurdo:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

- Dimostrazione per casi:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

$$(p \vee r) \Rightarrow (((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$$




CORRETTEZZA DEL MODUS PONENS

$$\begin{aligned} & (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{Elim} \Rightarrow \} \\ & \sim(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{Elim} \Rightarrow \} \\ & \sim(p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{DeMorgan} \} \\ & \sim p \vee \sim(\sim p \vee q) \vee q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{DeMorgan} \} \\ & \sim p \vee (\sim \sim p \wedge \sim q) \vee q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{Complemento} \} \\ & \sim p \vee \sim q \vee q \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{TerzoEscluso} \} \\ & \sim p \vee \mathbf{T} \\ \equiv & \quad \quad \quad \{ \text{Zero} \} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$



VERSO UNA LOGICA PIU' ESPRESSIVA

- Consideriamo domini come i numeri interi, o le persone: per formalizzare enunciati significativi abbiamo bisogno di arricchire il Calcolo Proposizionale introducendo la **Logica del Primo Ordine**.
 - Esempi (per valutarne l'espressività):
 - *Tutti i multipli di 9 sono multipli di 3*
($\forall x.\text{multiplo}(x, 9) \Rightarrow \text{multiplo}(x, 3)$)
 - *C'è almeno un numero naturale che non è primo*
($\exists x.\text{naturale}(x) \wedge \sim\text{primo}(x)$)
 - *Luigi ammira tutti quelli che suonano chitarra o flauto*
($\forall x.(\text{suona}(x,\text{chitarra}) \vee \text{suona}(x,\text{flauto})) \Rightarrow \text{ammira}(\text{luigi},x)$)
 - *Hanno diritto allo sconto solo i pensionati e i bambini*
($\forall x.\text{haSconto}(x) \equiv (\text{pensionato}(x) \vee \text{bambino}(x))$)
- 

LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: SINTASSI

- Un linguaggio del primo ordine comprende:
- **termini** costruiti con
 - costanti (**0**, **1**, **2**, ..., **Luigi**, ...)
 - variabili (**x**, **y**, ...)
 - simboli funzionali (**succ(x)**, **_+_**, ...)
- **formule** costruite con
 - simboli di predicati (**pari(x)**, **primo(x)**, **bambino(x)**, **multiplo(x,y)**, ...)
 - connettivi logici (come per il Calcolo Proposizionale)
 - quantificatori ($(\forall x . P)$, $(\exists x . P)$)
- Nota: i **predicati** senza argomenti corrispondono alle **proposizioni** del Calcolo Proposizionale...



SEMANTICA

- Il significato (**semantica**) di una formula è un valore di verità (come nel caso delle proposizioni)
- La semantica dipende da una **interpretazione** che stabilisce il significato dei simboli che vi compaiono, ovvero
 - Il **dominio di interesse**
 - A quali elementi del dominio corrispondono le costanti
 - A quali funzioni sul dominio corrispondono i simboli funzionali
 - A quali predicati (proprietà o relazioni) corrispondono i simboli di predicati



ESEMPIO

- Consideriamo la formula:

$$(\forall x.p(x) \vee q(x))$$

- Interpretazione 1:

- Il dominio è quello degli esseri umani
- Il predicato p significa “essere maschio”
- Il predicato q significa “essere femmina”
- La formula è vera

- Interpretazione 2:

- Il dominio è quello dei numeri naturali
- Il predicato p significa “essere numero primo”
- Il predicato q significa “essere numero pari”
- La formula è falsa



LOGICA DEL PRIMO ORDINE E CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Una formula è **valida** se è vera in qualunque interpretazione. Esempio: $(\forall x.p(x) \vee \sim p(x))$

formule valide \Leftrightarrow **tautologie**

- Non si possono usare **tabelle di verità** per dimostrare che una formula è valida
- Quindi bisogna necessariamente usare dimostrazioni
- Le dimostrazioni hanno strutture simili a quelle del Calcolo Proposizionale, ma sono estese con
 - Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
 - Eventuali leggi per gli operatori/predicati del dominio
- **Teorema di Incompletezza di Gödel:** *nella logica del primo ordine sui naturali, esistono formule vere che non sono dimostrabili.*



In bocca al lupo...

