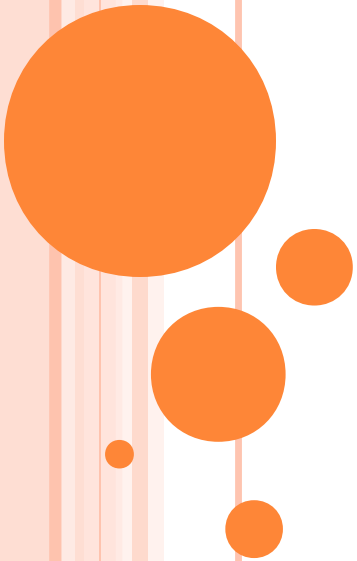


DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2010/11

Andrea Corradini

DIGRESSIONE: SULLA SINTASSI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Abbiamo già presentato la grammatica del calcolo:

Prop ::=

Prop ≡ Prop | Prop ∧ Prop | Prop ∨ Prop |
Prop ⇒ Prop | Prop ⇐ Prop |
Atom | ~Atom

Atom ::=

T | **F** | Ide | (Prop)

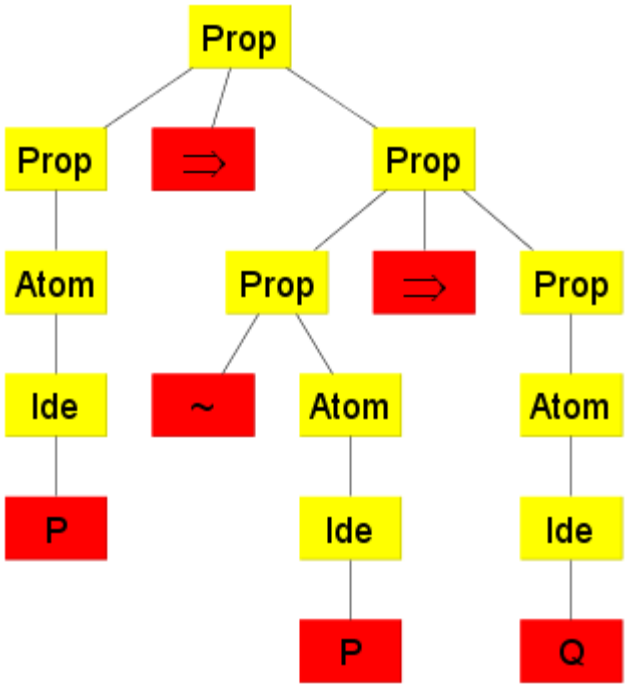
Ide ::=

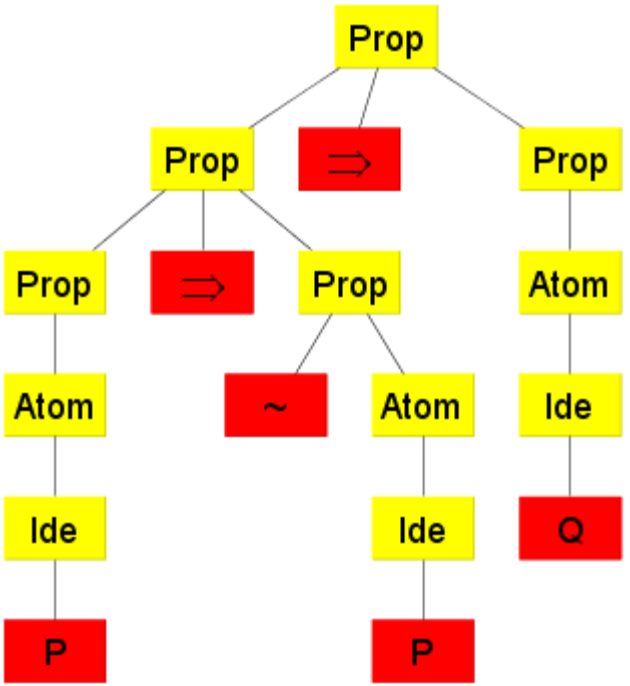
p | q | …| P | Q | …

- Questa grammatica è ambigua: ci sono proposizioni che hanno più di un albero di derivazione.
- Per esempio: **P ⇒ ~P ⇒ Q**

AMBIGUITA' DELLA GRAMMATICA: UN ESEMPIO

- Due alberi di derivazione per **P ⇒ ~P ⇒ Q**





P ⇒ [~ P ⇒ Q] **[P ⇒ ~ P] ⇒ Q**

- Esercizio: mostrare che la prima è una tautologia, la seconda no

PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

- Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

operatore	livello di precedenza
$\equiv$	0
$\Rightarrow, \Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3

- Per esempio,
  - $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere
  - $P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
- **Attenzione**: proposizioni come $\mathbf{P \wedge Q \vee R}$ o $\mathbf{P \Rightarrow Q \Rightarrow R}$ restano **ambigue**. Se non sono disambiguate con parentesi, vengono considerate **sintatticamente errate**

VERSO ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze

  (del tipo **p ≡ q**) usando una catena di equivalenze:

  p ≡ ... ≡ q

- Se la formula **p** da dimostrare non è un'equivalenza, si può mostrare equivalente a **T:** **p ≡ ... ≡ T**

- Se la formula è del tipo **p ⇒ q**, si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

  p ≡ ... ⇒ ... ≡ ... ⇒ q

  usando per giustificazioni, equivalenze o implicazioni tautologiche. Vediamo come...

ALCUNE IMPORTANTI LEGGI DERIVATE

- Hanno un'implicazione come connettivo principale
- Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

- $\mathbf{p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$ (Modus Ponens)

  $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
- $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow p}$ (Sempl.-$\wedge$)

  $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- $\mathbf{p \Rightarrow p \vee q}$ (Intro.-$\vee$)

  $p \Rightarrow (p \vee q)$

CORRETTEZZA DI MODUS PONENS E SEMPL-$\wedge$

$\mathbf{p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$ **(Modus Ponens)**

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$ }

$p \wedge (\sim p \vee q) \Rightarrow q$

$\equiv$ {Complemento}

$\mathbf{p \wedge q \Rightarrow q}$ **(Sempl.-$\wedge$)**

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$ }

$\sim(p \wedge q) \vee q$

$\equiv$ {DeMorgan}

$\sim p \vee \sim q \vee q$

$\equiv$ {TerzoEscluso, Zero}

T

VERSO LA DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

- Posso impostare la dimostrazione che $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_k}$ così:

$\mathbf{P_1}$

$\equiv$ {giustificazione$_1$}

…

$\equiv$ {giustificazione$_h$}

P

$\Rightarrow$ $\{ \mathbf{P \Rightarrow Q} \}$

Q

$\equiv$ {giustificazione$_{h+1}$}

…

$\equiv$ {giustificazione$_{k-1}$}

$\mathbf{P_k}$

ESEMPIO - TOLLENDO PONENS

- Usando la legge possiamo dimostrare

$$\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q}$$ (Tollendo Ponens)

$$p \wedge q \Rightarrow q \quad \text{(Sempl-}\wedge\text{)}$$

$\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p}$

$\equiv$ { Doppia Negazione e Complemento }

$q \wedge \sim p$

$\Rightarrow$ { Sempl.-$\wedge$ }

$\mathbf{q}$

- Si noti che abbiamo applicato (Sempl-$\wedge$) all'intera proposizione $q \wedge \sim p$

VALE UN PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE ?

- Il principio di sostituzione stabilisce che se **P ≡ Q**, allora **R ≡ R[Q/P]**
- E' valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

  "Se P ⇒ Q, allora R ⇒ R[Q/P]" (???)

- In generale **NO**. Infatti:

$$Z \Rightarrow U \wedge V$$
$$\Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \}$$
$$Z \Rightarrow U$$

OK

$$U \wedge V \Rightarrow Z$$
$$\Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \}$$
$$U \Rightarrow Z$$

NO

ANALOGIA CON DISUGUAGLIANZE ALGEBRICHE

- Una situazione del tutto analoga si incontra nella dimostrazione di disuguaglianze algebriche
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

a - c	**a - c**	**a - c**
≤ { a ≤ b }	**≤ { c ≤ d }**	**≥ { c ≤ d }**
b - c	**a - d**	**a - d**
OK	**NO**	**OK**

- Si noti che **a** compare *positivamente* in **(a - c)**, ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE

- Diciamo che **p occorre *positivamente* in**

  p **p ∨ q** **p ∧ q** **q ⇒ p**

- mentre **p occorre *negativamente* in**

  ~p

  p ⇒ q (si ricordi che p ⇒ q ≡ ~p ∨ q)

- Se **p** compare in **Q** a livello più profondo, si contano le **occorrenze negative** da **p** fino alla radice di **Q**:
  - se sono pari, **p occorre *positivamente* in Q**
  - se sono dispari **p occorre *negativamente* in Q**
- Attenzione: **p** può occorrere sia negativamente che positivamente in **Q**

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE: ESEMPI

- Come occorre **p** nelle seguenti proposizioni?
  - $(q \wedge p \wedge r) \vee s$
  - $q \Rightarrow \sim (p \wedge r)$
  - $(\sim p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow s$
  - $\sim p \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow s)$
  - $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
- Se ci sono più occorrenze di **p**, indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
  - $p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow q \vee \sim s)$
  - $p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow q \vee \sim s)$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE

- Se abbiamo stabilito
  - $p \Rightarrow q$
  - p occorre *positivamente* in r

  allora vale

  $$r \Rightarrow r\,[q/p]$$

- Se abbiamo stabilito
  - $p \Rightarrow q$
  - p occorre *negativamente* in r

  allora vale

  $$r \Leftarrow r\,[q/p]$$

DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI: ESEMPI

- **$(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$**

$p \wedge q \Rightarrow q$ (Sempl-$\wedge$)

$p \Rightarrow q \wedge r$

$\Rightarrow$ { (Sempl.-$\wedge$), $q \wedge r$ occorre positivamente }

$p \Rightarrow q$

- **$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$**

Partiamo dalla conseguenza:

$p \Rightarrow p \vee q$ (Intro.-$\vee$)

$(p \Rightarrow r)$

$\Leftarrow$ { (Intro.-$\vee$), p occorre negativamente }

$(p \vee q \Rightarrow r)$

ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE

- Alcune tautologie schematizzano delle tecniche di dimostrazione valide (alcune conosciute dalla scuola)

- $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (Controposizione)

Per dimostrare che $p \Rightarrow q$
si può dimostrare che $\sim q \Rightarrow \sim p$

- $p \equiv (\sim p \Rightarrow \mathbf{F})$ (Dimostrazione per Assurdo)

Per dimostrare p *basta mostrare*
che negando p *si ottiene una contraddizione*

- $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q \Rightarrow \mathbf{F})$ (Dimostrazione per Assurdo)

ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE

- Dimostrazione per casi:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow q \qquad (1)$$

Per dimostrare q *è sufficiente dimostrare che, per un certo* p, *valgono sia* $p \Rightarrow q$ che $\sim p \Rightarrow q$

$$(p \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow q) \qquad (2)$$

- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$ (Sempl.-$\Rightarrow$)

Per dimostrare che $p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$ *è sufficiente fornire due prove separate per* $p \Rightarrow q$ *e per* $r \Rightarrow s$

ALTRE TAUTOLOGIE UTILI

- $(p \Rightarrow \sim p) \equiv \sim p$ (Riduzione ad Assurdo)
- $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q$ (Scambio)
- $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$ (Tollendo Tollens)
- $(p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Elim-≡-bis)
- $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q \wedge r)$ (Sempl.Destra-⇒)
- $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q \vee r)$
- $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q \Rightarrow r)$ (Sempl.Sinistra-⇒)
- $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q \Rightarrow r)$
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q \Rightarrow r)$ (Sempl.Sinistra-2 ⇒)

- **Esercizio:** dimostrare che sono tautologie

FORME NORMALI

- Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:
- Forma normale congiuntiva

  $$(p_1 \vee p_2 \vee \dots) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots) \wedge \dots$$

- Forma normale disgiuntiva

  $$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots) \vee \dots$$

  dove $p_1\ p_2 \dots\ q_1\ q_2 \dots$ sono variabili proposizionali, eventualmente negate
- Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- **$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$** (Risoluzione)

Questa legge permette di semplificare una formula in ***forma normale congiuntiva***. E' il meccanismo di calcolo alla base della ***programmazione logica***.

$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

$\equiv$ {Elim- $\Rightarrow$, 2 volte}

$(\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$

$\Rightarrow$ {Transitività- $\Rightarrow$ }

$\sim q \Rightarrow r$

$\equiv$ {Elim- $\Rightarrow$ }

$q \vee r$

ESEMPIO

- La mia *conoscenza*:
  - *regole*
    - $r \Rightarrow p$
    - $q \Rightarrow r$
  - *fatti*
    - r
    - q
- Vorrei provare che p è una *conseguenza logica* della mia conoscenza
- *Strategia*: faccio vedere che aggiungendo ~p alla mia conoscenza cado in contraddizione (dimostrazione per assurdo: $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q \Rightarrow \mathbf{F})$)
- Uso la risoluzione per applicare le regole

CALCOLO

$(r \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge r \wedge q \wedge \sim p$

$\equiv$ {Elim.- $\Rightarrow$, 2 volte}

$(\sim r \vee p) \wedge (\sim q \vee r) \wedge r \wedge q \wedge \sim p$

$\Rightarrow$ {Risoluzione applicata ai fattori sottolineati (si noti che entrambi occorrono positivamente, e che $r \equiv r \vee F$)}

$p \wedge (\sim q \vee r) \wedge q \wedge \sim p$

$\equiv$ {Contraddizione}

$F \wedge (\sim q \vee r) \wedge q$

$\equiv$ {zero}

F