LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A,B) - a.a. 2010-2011
SOLUZIONI PROPOSTE
SESTO APPELLO - 07/09/2011

ESERCIZIO 1

Si provi che la seguente proposizione è una tautologia:

$$(P \Rightarrow Q \vee S) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q \wedge \neg S) \Rightarrow R \vee \neg P$$

Soluzione 1

Partiamo dalle premesse.

$(P \Rightarrow Q \vee S) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q \wedge \neg S)$

$\equiv$ { Contropositiva, Doppia negazione }

$(P \Rightarrow Q \vee S) \wedge (\neg(\neg Q \wedge \neg S) \Rightarrow R)$

$\equiv$ { De Morgan, Doppia negazione }

$(P \Rightarrow Q \vee S) \wedge (Q \vee S \Rightarrow R)$

$\Rightarrow$ { Trans-$\Rightarrow$ }

$P \Rightarrow R$

$\equiv$ { Elim.-$\Rightarrow$ }

$\neg P \vee R$

Soluzione 2

La conseguenza è equivalente a $(P \Rightarrow R)$, per Elim.-$\Rightarrow$. Dimostriamola usando le implicazioni nella premessa come ipotesi:

P

$\Rightarrow$ {**Ip:** $(P \Rightarrow Q \vee S)$}

$Q \vee S$

$\Rightarrow$ {**Ip:** $(\neg R \Rightarrow \neg Q \wedge \neg S)$, equivalente a $(Q \vee S \Rightarrow R)$ per Contraposizione e DeMorgan }

R

Soluzione 3

Partiamo dalle premesse, e riduciamole in forma normale congiuntiva; poi applichiamo la risoluzione.

$(P \Rightarrow Q \vee S) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q \wedge \neg S)$

$\equiv$ { Elim-$\Rightarrow$, 2 volte }

$(\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg\neg R \vee (\neg Q \wedge \neg S))$

$\equiv$ { Doppia negazione, Distributiv. }

$(\neg P \vee Q \vee S) \wedge (R \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg S)$

$\Rightarrow$ { Risoluzione }

$(\neg P \vee S \vee R) \wedge (R \vee \neg S)$

$\Rightarrow$ { Risoluzione }

$(\neg P \vee R)$

Soluzione 4

Partiamo dalla conseguenza, usando le implicazioni nella premessa come ipotesi:

$R \vee \neg P$

$\Leftarrow$ {**Ip:** $(P \Rightarrow Q \vee S)$, P appare in contesto negativo }

$R \vee \neg(Q \vee S)$

$\Leftarrow$ {**Ip:** $(\neg R \Rightarrow \neg Q \wedge \neg S)$, equivalente a $(R \Leftarrow \neg(\neg Q \wedge \neg S))$ }

$\neg(\neg Q \wedge \neg S)) \vee \neg(Q \vee S)$

$\equiv$ { De Morgan, Doppia Negazione }

$(Q \vee S) \vee \neg(Q \vee S)$

$\equiv$ { Terzo escluso}

T

ESERCIZIO 2

Si provi che la seguente formula è valida (Q, R e S contengono la variabile libera x)

$$(\forall x.R \Rightarrow Q) \wedge (\exists x.\neg S \wedge R) \Rightarrow \neg(\forall x.Q \Rightarrow S)$$

Soluzione Partiamo dalla premessa, indicando con d un generico elemento del dominio che testimonia $(\exists x.\neg S \wedge R)$ (quindi usiamo la Regola di Skolemizzazione):

$(\forall x.R \Rightarrow Q) \wedge \neg S[d/x] \wedge R[d/x]$

$\Rightarrow$ { Elim-$\forall$ }

$(R[d/x] \Rightarrow Q[d/x]) \wedge \neg S[d/x] \wedge R[d/x]$

$\Rightarrow$ { Modus Ponens }

$Q[d/x] \wedge \neg S[d/x]$

$\Rightarrow$ { Intro-$\exists$ }

$(\exists x.Q \wedge \neg S)$

$\equiv$ { Doppia Negazione, De Morgan }
$\neg(\forall x.\neg(Q \wedge \neg S))$
$\equiv$ { Doppia Negazione, De Morgan }
$\neg(\forall x.\neg Q \vee S)$
$\equiv$ { Intro-$\Rightarrow$ }
$\neg(\forall x.Q \Rightarrow S)$

ESERCIZIO 3
Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzi il seguente enunciato dichiarativo, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa, *in tutte le sue componenti*. Il dominio di interpretazione deve contenere l'insieme $\mathcal{L}$ delle leggi e l'insieme $\mathcal{C}$ dei cittadini.

"Tutti i cittadini onesti rispettano le leggi"

Soluzione

- **Linguaggio**
  - $\mathbf{C} = \emptyset$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{P} = \{cittadino(\cdot), legge(\cdot), onesto(\cdot), rispetta(\cdot, \cdot)\}$
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$
  - $\mathbf{D} = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$, con $\mathcal{L}$ insieme delle leggi e $\mathcal{C}$ insieme dei cittadini.
  - $\alpha(cittadino)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo p è un cittadino
  - $\alpha(legge)(l) \equiv \mathbf{T}$ se e solo l è una legge
  - $\alpha(onesto)(p) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se p è un cittadino onesto
  - $\alpha(rispetta)(p, l) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se p rispetta la legge l

Una formalizzazione è allora

$$(\forall p.cittadino(p) \wedge onesto(p) \Rightarrow (\forall l.legge(l) \Rightarrow rispetta(p, l)))$$

ESERCIZIO 4

Assumendo **a : array [0, n) of nat** e **b : array [0, m) of nat** si formalizzi il seguente enunciato:

"Ciascun elemento dispari dell'array **a** è strettamente minore di almeno un elemento pari dell'array **b**"

Soluzione

$$(\forall i.i \in [0, n) \wedge dispari(a[i]) \Rightarrow (\exists j.j \in [0, m) \wedge pari(b[j]) \wedge a[i] < b[j]))$$

dove *dispari* e *pari* hanno il significato ovvio.

ESERCIZIO 5
Si determini una espressione E in modo che la seguente tripla sia verificata e si dimostri formalmente la correttezza della soluzione proposta.

{x = A $\wedge$ y = B }
if x > 0 **then** z := y+x; **else** z := E; **fi**
{z > y}

Soluzione Da una semplice analisi del comando si vede facilmente che una soluzione corretta, tra le tante, è $E = y + 1$. L'esercizio si riduce quindi a una semplice applicazione della Regola del Condizionale.
Attenzione: Una soluzione del tipo $E = B + 1$ non è corretta, perché B è una variable di specifica e non può comparire in una espressione.

ESERCIZIO 6
Si consideri il seguente programma annotato.

{x=A ∧ y=B ∧ A ≥ 0 ∧ B ≥ 0}
{Inv : x ≥ 0 ∧ y ≥ 0 }{t: x + y}
while x≠y **do**
  if x > y **then** x := x-1; **else** y := y-1; **fi**
endw
{x=y}

1. Scrivere per esteso le proprietà di invarianza e terminazione
2. Scrivere e dimostrare la proprietà di progresso

Soluzione

1.1) La proprietà di invarianza è la tripla

$\{x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y\}$
  if x > y **then** x := x-1; **else** y := y-1; **fi**
$\{x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge def(x \neq y)\}$

1.2) La proprietà di terminazione è l'implicazione: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$

2) La proprietà di progresso è la tripla

$\{x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y \wedge x + y = V\}$
  if x > y **then** x := x-1; **else** y := y-1; **fi**
$\{x + y < V\}$

la cui dimostrazione è la seguente semplice applicazione della regola per il condizionale.

2.1) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y \wedge x + y = V \Rightarrow def(x > y)$

Ovvio essendo $def(x > y) = T$.

2.2) $\{\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y \wedge x + y = V \wedge x > y\}\ x := x - 1\ \{x + y < V\}$

Dimostriamo l'implicazione che deriva dalla applicazione della regola per l'assegnamento.

$x - 1 + y < V$
$\equiv$ {calcolo}
$x + y < V + 1$
$\equiv$ {**IP:** $x + y = V$, Leibniz}
$V < V + 1$
$\equiv$ {calcolo}
$0 < 1$
$\equiv$
T

2.3) $\{ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y \wedge x + y = V \wedge \neg(x > y)\}\ y := y - 1\ \{x + y < V\}$

Dimostriamo l'implicazione che deriva dalla applicazione della regola per l'assegnamento.

$$
\begin{array}{ll}
 & x + y - 1 < V \\
\equiv & \quad \{\text{calcolo}\} \\
 & x + y < V + 1 \\
\equiv & \quad \{\textbf{IP:}\ x + y = V, \text{ Leibniz}\} \\
 & V < V + 1 \\
\equiv & \quad \{\text{calcolo}\} \\
 & 0 < 1 \\
\equiv & \\
 & T
\end{array}
$$