

Logica per la Programmazione

Lezione 10

- ▶ Logica del Primo Ordine con **Insiemi ed Intervalli**
- ▶ Formalizzazione di Enunciati: **Array e Sequenze**

Rappresentazioni Intensionali ed Estensionali di Insiemi

- ▶ Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- ▶ Rappresentazione **estensionale** (*in extenso*) di insiemi

$$\textit{Divisori_di_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- ▶ Rappresentazione **intensionale** (*in intenso*) di insiemi

$$\textit{Divisori_di_30} = \{k \mid k \leq 30 \wedge (\exists n . k \times n = 30)\}$$

- ▶ Rappresentazione **intensionale per insiemi infiniti**

$$\textit{Multipli_di_7} = \{k \mid (\exists n . k = n \times 7)\}$$

Notazione per Insiemi

- ▶ Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare **insiemi di naturali in modo intensionale**:

$$Term ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\}) \mid \{Var \mid Fbf\}$$

- ▶ Abbiamo **termini** come $\{x \mid P\}$ dove x è una variabile, e P una formula (solitamente con x libera).
- ▶ La variabile x è **legata** in $\{x \mid P\}$
- ▶ Nuovo simbolo di **predicato binario** \in , definito dalla legge:

$$y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x] \quad (\text{def-}\in)$$

Insieme Vuoto

- ▶ Introduciamo la nuova **costante** \emptyset , definita come $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$
- ▶ Dimostriamo che $(\forall y.(y \in \emptyset) \equiv \mathbf{F})$ è valida.
- ▶ Per la **Regola di Generalizzazione**, è sufficiente dimostrare $(k \in \emptyset) \equiv \mathbf{F}$ per una nuova costante k

$$k \in \emptyset$$

$$\equiv \{(\text{Def. di } \emptyset)\}$$

$$k \in \{x \mid \mathbf{F}\}$$

$$\equiv \{(\text{Def. di } \in) [y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x]]\}$$

F

Leggi per Insiemi

- ▶ Ricordiamo il **principio di estensionalità** degli insiemi e la **definizione di inclusione**: per ogni coppia di insiemi (A, B) vale
 - ▶ $(A = B) \equiv (\forall x. x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
 - ▶ $(A \subseteq B) \equiv (\forall x. x \in A \Rightarrow x \in B)$
- ▶ Valgono le seguenti leggi:

$$(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\equiv)$$

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\Rightarrow)$$

- ▶ Dimostriamo la seconda usando la definizione di inclusione:

$$\begin{aligned} & z \in \{x \mid P\} \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & P[z/x] \\ \Rightarrow & \quad \{(\text{Ip: } \forall x. P \Rightarrow Q), (\text{Elim-}\forall)\} \\ & Q[z/x] \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & z \in \{x \mid Q\} \end{aligned}$$

Uguaglianze e Disuguaglianze

Estendiamo il linguaggio del primo ordine con i **predicati binari \leq e \geq** .
 I predicati $=, \leq, \geq$ soddisfano i **seguenti assiomi** (la quantificazione universale è implicita):

$$\blacktriangleright x = x \quad (\text{riflessività}=\text{=})$$

$$\blacktriangleright (x = y) \Rightarrow (y = x) \quad (\text{simmetria}=\text{=})$$

$$\blacktriangleright (x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z) \quad (\text{transitività}=\text{=})$$

$$\blacktriangleright x \leq x \quad (\text{riflessività}\leq)$$

$$\blacktriangleright (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y) \quad (\text{antisimmetria}\leq)$$

$$\blacktriangleright (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z) \quad (\text{transitività}\leq)$$

$$\blacktriangleright (x \leq y) \vee (y \leq x) \quad (\text{totalità}\leq)$$

$$\blacktriangleright (x \geq y) \equiv (y \leq x) \quad (\text{def}\geq)$$

I predicati $\leq, \geq, =$ legano più dei connettivi logici: tutte le parentesi possono essere omesse

Un po' di Terminologia...

- ▶ Una **relazione binaria** R è una **relazione di equivalenza** se è
 - ▶ **riflessiva**: $x R x$
 - ▶ **simmetrica**: $(x R y) \Rightarrow (y R x)$
 - ▶ **transitiva**: $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow (x R z)$

Esempio: l'uguaglianza $=$, l'equivalenza \equiv

- ▶ Una **relazione binaria** è una **relazione di ordinamento** se è
 - ▶ **riflessiva**, **transitiva** e **anti-simmetrica**

$$(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow (x = y)$$

Esempio: inclusione \subseteq tra insiemi, \leq su numeri naturali

- ▶ Una **relazione di ordinamento** è **totale** se
 - ▶ per ogni x, y vale $(x R y) \vee (y R x)$

Esempio: \leq su numeri naturali

Domanda: l'inclusione \subseteq tra insiemi è totale?

Intervalli: Notazione e Definizioni

- ▶ Introduciamo le seguenti **abbreviazioni sintattiche**, $a, b \in \mathbb{N}$:
 - ▶ $[a, b] = \{x \mid (a \leq x) \wedge (x \leq b)\}$ **intervallo chiuso**
 - ▶ $[a, b) = \{x \mid (a \leq x) \wedge (x < b)\}$ **intervallo semiaperto a destra**
 - ▶ $(a, b] = \{x \mid (a < x) \wedge (x \leq b)\}$ **intervallo semiaperto a sinistra**
 - ▶ $(a, b) = \{x \mid (a < x) \wedge (x < b)\}$ **intervallo aperto**
- ▶ Definizione di **relazioni ausiliarie**:

$$(x \neq y) \equiv \neg(x = y) \quad (\text{def-}\neq)$$

$$(x < y) \equiv (x \leq y) \wedge (x \neq y) \quad (\text{def-}<)$$

$$(x > y) \equiv (x \geq y) \wedge (x \neq y) \quad (\text{def-}>)$$

Altre leggi su disuguaglianze

Dimostrare le seguenti leggi:

$$(x \geq y) \equiv (x > y) \vee (x = y) \quad (\text{elim-}\geq)$$

$$(x \leq y) \equiv (x < y) \vee (x = y) \quad (\text{elim-}\leq)$$

$$\neg(x \leq y) \equiv x > y \quad (\neg\leq)$$

$$\neg(x \geq y) \equiv x < y \quad (\neg\geq)$$

Notazione per gli Intervalli

Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I , che noi eviteremo:

- ▶ $(\forall x \in I.Q)$ o $(\forall x : x \in I.Q)$ per $(\forall x.x \in I \Rightarrow Q)$
- ▶ $(\exists x \in I.Q(x))$ o $(\exists x : x \in I.Q)$ per $(\exists x.x \in I \wedge Q)$

Leggi per Quantificazioni su Domini

Sia \mathbf{k} un termine chiuso, che denota un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la **quantificazione sul dominio P** ad un dominio più piccolo ($P \wedge (x \neq \mathbf{k})$):

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. P \wedge (x \neq \mathbf{k}) \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x. P \wedge (x \neq \mathbf{k}) \Rightarrow Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x. P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. P \wedge (x \neq \mathbf{k}) \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x. P \wedge (x \neq \mathbf{k}) \wedge Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (1)

Vogliamo mostrare che le seguenti implicazioni sono valide:

1. $P[k/x] \Rightarrow ((\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv (\forall x.P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x])$
2. $\neg P[k/x] \Rightarrow ((\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv (\forall x.P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q))$

Trasformiamo il membro sinistro dell'equivalenza:

$$\begin{aligned}
 & (\forall x.P \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso}), (\text{Unit\`a})\} \\
 & (\forall x.P \wedge ((x = k) \vee (x \neq k)) \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{Distrib.})\} \\
 & (\forall x.(P \wedge (x = k)) \vee (P \wedge (x \neq k)) \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{Dominio})\} \\
 & (\forall x.P \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{Leibniz})\} \\
 & (\forall x.P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q)
 \end{aligned}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (2)

Completiamo la dimostrazione nei due casi usando ipotesi non valide:

► Caso $P[k/x] \equiv \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} & (\forall x. P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\text{Ip: } P[k/x] \equiv \mathbf{T}, (\text{Unit\`a})\} \\ & (\forall x. (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{(\text{Singoletto})\} \\ & Q[k/x] \wedge (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \end{aligned}$$

► Caso $P[k/x] \equiv \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} & (\forall x. P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\text{Ip: } P[k/x] \equiv \mathbf{F}, (\text{Zero})\} \\ & (\forall x. \mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}, (\text{costante}), (\text{unit\`a})\} \\ & (\forall x. P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \end{aligned}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (1)

Presentiamo una specializzazione delle leggi precedenti, quando **il dominio è un intervallo**. Quindi la formula del dominio è $x \in [a, b)$:

$$(\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

$$(\exists x. x \in [a, b) \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (2)

- ▶ Altre leggi molto utili nel caso in cui il dominio sia $x \in [a, b]$ l'elemento sia proprio l'estremo dell'intervallo destro o sinistro

$$(\forall x . x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x . x \in [a, b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\forall x . x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x . x \in (a, b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x . x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x . x \in [a, b) \wedge P) \vee P[b/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x . x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x . x \in (a, b] \wedge P) \vee P[a/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

Specifiche con Array e Sequenze

- ▶ Un array a di lunghezza n è rappresentato da una **funzione dall'intervallo** $[0, n) = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ ad \mathbb{N}
- ▶ **Notazione:** $a[i]$ indica il valore i -esimo della funzione (array) a
- ▶ Esempio: $a = \{0 \mapsto 45, 1 \mapsto 23, 2 \mapsto 10, 3 \mapsto 16\}$

45	23	10	16
----	----	----	----

- ▶ Nota: il primo elemento ha posizione/indice 0: $a[0] = 45$

Esercizi di Formalizzazione (1)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n , fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- ▶ a è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall i. i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = 0)$$

- ▶ per ogni elemento di a esiste un elemento di b uguale o più grande

$$(\forall i. i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j. j \in [0, n) \wedge a[i] \leq b[j]))$$

Esercizi di Formalizzazione (2)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n , fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

1. a rappresenta una funzione monotona crescente
2. m è il massimo dell'array a
3. m è l'indice del massimo dell'array a
4. a ha tutti elementi distinti
5. a ha tutti elementi distinti e b è l'array a ordinato in senso crescente.

Esercizi di Formalizzazione (3)

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- ▶ Nella sequenza \mathbf{a} c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- ▶ Gli elementi di indice pari della sequenza \mathbf{a} sono dispari
- ▶ Definire il predicato $Palindroma(\mathbf{a})$, che vale \mathbf{T} se e solo la sequenza \mathbf{a} è simmetrica rispetto al suo punto centrale