

Logica per la Programmazione

Lezione 9

- ▶ Proof System per la Logica del Primo Ordine
- ▶ Leggi per i Quantificatori
- ▶ Regole di inferenza: Generalizzazione e Skolemizzazione

Leggi per i Quantificatori

- ▶ Per il Calcolo Proposizionale, le leggi che abbiamo visto sono **tautologie**: lo abbiamo dimostrato usando tavole di verità o dimostrazioni di vario formato
- ▶ Per LPO le **leggi** sono **formule valide**
- ▶ Per convincerci della validità di una legge possiamo usare
 - ▶ la definizione di validità, oppure
 - ▶ una dimostrazione che usi solo premesse valide
- ▶ Ricordiamo che in una formula con quantificatore come $(\forall x.P)$ la **portata** di $\forall x$ è la sottoformula P . Analogamente, in $(\exists x.P)$ la **portata** di $\exists x$ è la sottoformula P .

Leggi per i Quantificatori: (1)

► (elim- \forall)

$$(\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$$

dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t .

- *Nota*: un termine chiuso contiene solo costanti e simboli di funzione, non variabili.

► Esempi:

$$\begin{aligned} & (\forall x.pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg primo(x)) \\ \Rightarrow & \quad \{(elim - \forall)\} \\ & pari(7) \wedge 7 > 2 \Rightarrow \neg primo(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x.uomo(x) \Rightarrow mortale(x)) \\ \Rightarrow & \quad \{(elim - \forall)\} \\ & uomo(Socrate) \Rightarrow mortale(Socrate) \end{aligned}$$

Validità della Legge (elim- \forall)

- ▶ Poiché non abbiamo visto altre leggi, usiamo la definizione di validità: (elim- \forall) deve essere vera in qualunque interpretazione
- ▶ Sia $\phi \equiv (\forall x.P) \Rightarrow P[t/x]$.
- ▶ **Per assurdo:** sia $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ tale che $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ per ρ qualunque
- ▶ Per (S6), $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{F}$ sse $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{F}$
- ▶ Se $\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \mathbf{T}$, per (S8) abbiamo: $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(P) = \mathbf{T}$ per qualunque d in \mathcal{D} .
- ▶ ... e quindi in particolare $\mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P) = \mathbf{T}$ con $\underline{d} = \alpha_\rho(\mathbf{t})$
- ▶ Ma allora $\mathcal{I}_\rho(P[t/x]) = \mathbf{T}$, e abbiamo ottenuto una contraddizione [Abbiamo usato $\mathcal{I}(P[t/x])_\rho = \mathcal{I}_{\rho[\underline{d}/x]}(P)$, che si può dimostrare per induzione strutturale su t]

Leggi per i Quantificatori (2)

► (intro- \exists)

$$P[t/x] \Rightarrow (\exists x.P)$$

dove t è un **termine chiuso** e $P[t/x]$ è ottenuto da P sostituendo tutte le occorrenze libere di x in P con t

► Esempio:

$$\text{pari}(10) \wedge 10 > 2$$

$$\Rightarrow \{(\text{intro} - \exists)\}$$

$$(\exists x.\text{pari}(x) \wedge x > 2)$$

- **Esercizio:** Dimostrare la validità di (intro- \exists) utilizzando la definizione di validità di una formula, come visto per (elim- \forall).

Leggi per i Quantificatori (3)

▶

$$\neg(\forall x.P) \equiv (\exists x.\neg P) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\neg(\exists x.P) \equiv (\forall x.\neg P)$$

▶

$$(\forall x.(\forall y.P)) \equiv (\forall y.(\forall x.P)) \quad (\text{Annidamento})$$

$$(\exists x.(\exists y.P)) \equiv (\exists y.(\exists x.P))$$

- ▶ Le seguenti leggi (**costante**) valgono solo se si assume che il **dominio di interpretazione non sia vuoto**:

$$(\forall x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

$$(\exists x.P) \equiv P \quad \text{se } x \text{ non occorre in } P$$

- ▶ **Esercizio**: Dimostrare la validità delle leggi presentate.

Leggi per i Quantificatori (4)

▶

$$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge (\forall x.Q) \quad (\forall : \wedge)$$

$$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee (\exists x.Q) \quad (\exists : \vee)$$

▶

$$(\forall x.P) \vee (\forall x.Q) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) \quad (\forall : \vee)$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \quad (\exists : \wedge)$$

▶

$$(\forall x.P \vee Q) \equiv (\forall x.P) \vee Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\textit{Distrib.})$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv (\exists x.P) \wedge Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\textit{Distrib.})$$

▶ **Esercizio:** Dimostrare la validità delle leggi presentate.

Altre Leggi per i Quantificatori, da dimostrare

- ▶ Le seguenti leggi (Distrib.) valgono solo se si assume che il dominio di interpretazione non sia vuoto:

$$(\forall x.P \wedge Q) \equiv (\forall x.P) \wedge Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\textit{Distrib.})$$

$$(\exists x.P \vee Q) \equiv (\exists x.P) \vee Q \text{ se } x \text{ non occorre in } Q \quad (\textit{Distrib.})$$

- ▶ Per esercizio:

$$(\forall x.P) \Rightarrow (\forall x.P \vee Q) \qquad (\forall x.P \wedge Q) \Rightarrow (\forall x.P)$$

$$(\exists x.P) \Rightarrow (\exists x.P \vee Q) \qquad (\exists x.P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x.P)$$

Quantificazione ristretta ad un Insieme: Domini

- ▶ Spesso la **quantificazione** (**universale o esistenziale**) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula P :

$$(\forall x. P \Rightarrow Q)$$

$$(\exists x. P \wedge Q)$$

- ▶ In queste formule, la formula P è il **dominio del quantificatore**
- ▶ Si introducono le **seguenti abbreviazioni**:
 $(\forall x. P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x : P. Q)$
 $(\exists x. P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x : P. Q)$
- ▶ **Attenzione**: queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.

Formule Vacuamente Vere

- ▶ Sia P una formula con x libera, e $I = (\mathcal{D}, \alpha)$ un'interpretazione
- ▶ Diciamo che
 - il dominio P è vuoto in I** se vale $I_\rho[(\exists x.P)] = \mathbf{F}$ (†)
- ▶ Allora valgono i seguenti fatti:
 1. La formula $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ è **vacuamente vera** in I se il dominio P è vuoto in I .
 2. Dualmente, la formula $(\exists x.P \wedge Q)$ è **vacuamente falsa** in I se il dominio P è vuoto in I .
- ▶ Prima di dimostrare (1.) osserviamo che (†) può essere riformulato come:
 - P è vuoto in I **se per ogni $d \in \mathcal{D}$ vale $I_{\rho[d/x]}[P] = \mathbf{F}$** (‡)
 applicando (S3), (De Morgan) e (S8).
Esercizio: verificare questa affermazione.

Formule Vacuamente Vere (2)

- Dimostriamo la (1.), mostrando che se P è vuoto in I , allora $I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q .

$$\begin{aligned}
 & I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T} \\
 \equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & I_\rho[(\forall x.\neg P \vee Q)] \equiv \mathbf{T} \\
 \equiv & \quad \{(\text{Regola (S8)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D}, I_{\rho[d/x]}[\neg P \vee Q] \equiv \mathbf{T} \\
 \equiv & \quad \{(\text{Regola (S5)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D}, I_{\rho[d/x]}[\neg P] \equiv \mathbf{T} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
 \equiv & \quad \{(\text{Regola (S3)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D}, I_{\rho[d/x]}[P] \equiv \mathbf{F} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
 \equiv & \quad \{\text{Ip: } P \text{ vuoto, condizione } (\ddagger) \text{ della pagina precedente}\} \\
 & \mathbf{T}
 \end{aligned}$$

Alcune leggi per Quantificatori con Dominio

► Leggi per unione di domini:

- ▶ $(\forall x. P \vee Q \Rightarrow R) \equiv (\forall x. P \Rightarrow R) \wedge (\forall x. Q \Rightarrow R)$ (Dominio)
- ▶ $(\exists x. (P \vee Q) \wedge R) \equiv (\exists x. P \wedge R) \vee (\exists x. Q \wedge R)$ (Dominio)

► Molte leggi per quantificatori valgono anche se si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono in [LP2]):

- ▶ $(\forall x. R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x. R \Rightarrow P) \wedge (\forall x. R \Rightarrow Q)$ ($\forall : \wedge$)
- ▶ $\neg(\exists x. R \wedge P) \equiv (\forall x. R \Rightarrow \neg P)$ (De Morgan)

Esercizio: Dimostrare le leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio

Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza

- ▶ Considereremo sempre linguaggi del primo ordine con **uguaglianza**, cioè con il simbolo speciale di predicato binario “=” (quindi $= \in \mathcal{P}$)
- ▶ Il significato di “=” è fissato: per qualunque interpretazione, la formula $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ è vera se e solo se \mathbf{t} e \mathbf{t}' **denotano lo stesso elemento del dominio di interesse**
- ▶ Più formalmente: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$, abbiamo $\mathcal{I}_\rho(\mathbf{t} = \mathbf{t}') = \mathbf{T}$ se $\alpha_\rho(\mathbf{t}) = \alpha_\rho(\mathbf{t}')$ (cioè se le semantiche di \mathbf{t} e \mathbf{t}' coincidono), **F** altrimenti

Leggi per l'Uguaglianza

- ▶ Per il predicato di uguaglianza valgono le seguenti leggi (dove la x può comparire libera in P):

$$(1) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \Rightarrow (P \equiv P[y/x]))) \quad (\textit{Leibniz})$$

$$(2) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]))$$

$$(3) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \wedge P \Rightarrow P[y/x]))$$

$$(\forall y . (\forall x . (x = y) \Rightarrow P) \equiv P[y/x]) \quad (\textit{singoletto})$$

$$(\forall y . (\exists x . (x = y) \wedge P) \equiv P[y/x])$$

- ▶ **Esercizio:** Dimostrare che $(1) \equiv (2)$ e che $(1) \Rightarrow (3)$.

Regole di Inferenza: La Regola di Generalizzazione

- ▶ Per dimostrare una formula del tipo $(\forall x.P)$ possiamo procedere sostituendo x con un nuovo simbolo di costante d e dimostrare $P[d/x]$

$$\frac{\Gamma \vdash P[d/x], \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)}$$

- ▶ Intuitivamente, d rappresenta un **generico elemento del dominio** sul quale non possiamo fare alcuna ipotesi

Leggi per l'Uguaglianza e Generalizzazione

- ▶ **Attenzione:** spesso (e anche nella dispensa) queste leggi sono scritte informalmente *senza* quantificazioni:

$$(1) \quad (x = y) \Rightarrow (P \equiv P[y/x]) \quad (\textit{Leibniz})$$

$$(2) \quad (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]$$

$$(3) \quad (x = y) \wedge P \Rightarrow P[y/x]$$

- ▶ Se consideriamo x e y come variabili, sarebbero formule aperte, quindi non accettabili come leggi.
- ▶ Possiamo considerare la quantificazione universale implicita, quindi queste leggi come un abbreviazione di quelle presentate prima.
- ▶ Possiamo anche considerare x e y come costanti generiche e dedurre le formule quantificate universalmente con la Regola di Generalizzazione.

Regole di Inferenza: La Regola di Skolemizzazione

- ▶ Se sappiamo che $(\exists x.P)$ è vera, possiamo usarla per dimostrare una qualsiasi formula Q usando come ipotesi $P[d/x]$, dove d è una costante nuova, che non compare in Q :

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \quad \Gamma, P[d/x] \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$$

con d nuova costante che non occorre in Q

- ▶ Intuitivamente, è come se chiamassimo d un **ipotetico elemento del dominio** che testimonia la verità di $(\exists x.P)$.

Sulla Regola di Skolemizzazione

- ▶ Dal Teorema di Deduzione sappiamo che

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma, P \vdash Q$$

- ▶ Sfruttiamo questo fatto per derivare dalla Regola di Skolemizzazione una regola più semplice, che usa solo implicazioni e non premesse.
- ▶ [Skolemizzazione], già vista

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \quad \Gamma, P[d/x] \vdash Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{\Gamma \vdash Q}$$

- ▶ [Skolemizzazione \Rightarrow]

$$\frac{(\exists x.P) \wedge P[d/x] \wedge R \Rightarrow Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{(\exists x.P) \wedge R \Rightarrow Q}$$

Esempi di formule dimostrabili con Skolemizzazione

1. $(\forall x . P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x . P) \Rightarrow (\exists x . Q)$
2. $(\forall x . P) \wedge (\exists x . Q) \Rightarrow (\exists x . P)$
3. $(\forall x . P \Rightarrow R) \wedge (\exists x . P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x . Q \wedge R)$
4. $((\forall x . P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x . Q \wedge \neg S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \Rightarrow \neg(\forall x . \neg P \wedge \neg(S \vee R))$

Esercizio: Dimostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x . P) \Rightarrow (\exists x . P)$$