LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18
Sesta esercitazione – 5-6 dicembre 2017– Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1 Si verifichino le seguenti triple (A è una variabile di specifica).

1. $\{A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge \ y < x\}$
   $x := 2 * x + y$
   $\{y < x\}$

2. $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\}$
   $x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$
   $\{x = y * y\}$

3. $\{n > 0 \ \wedge \ y = x * n\}$
   $y, x := y + n, x + 1$
   $\{y = x * n\}$

4. $\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \,.\, i)\}$
   $sum := sum + x; \quad x := x + 1$
   $\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \,.\, i)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. $\{A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge y < x\}$
   $x := 2 * x + y$
   $\{y < x\}$

Possiamo ricorrere alla Regola dell'Assegnamento

$$\frac{R \Rightarrow def(E) \wedge P[E/x]}{\{R\}x := E\{P\}}$$

dove $def(E)$ è vera in uno stato σ se il valore di E in σ (cioè $\mathcal{E}(E, \sigma)$) è ben definito. L'assegnamento $x := E$ parte dallo stato σ e arriva nello stato $\sigma[\mathcal{E}(E, \sigma)/x]$.

La verifica si riduce allora a dimostrare che:

$A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge y < x \Rightarrow def(2 * x + y) \wedge (y < x)[(2 * x + y)/x]$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, ed utilizzando le premesse come ipotesi. Notiamo inoltre che $def(2 * x + y) \equiv \mathbf{T}$.

$y < 2 * x + y$

$\equiv$ {**Ip:** $x = A$}

$y < (2 * A + y)$

$\equiv$ {**Ip:** $A > 0$, calcolo}

T

2. $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\}$
   $x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$

$\{x = y * y\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(2.1) $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\} \quad x := x + 2 * y + 1 \quad \{R\}$

(2.2) $\{R\} \quad y := y + 1 \quad \{x = y * y\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (2.2) è verificata per il seguente valore di R:

$def(y + 1) \wedge (x = y * y)[y + 1/y]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

$x = (y + 1) * (y + 1)$

Allora, per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (2.1) con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$(y > 0 \ \wedge \ x = y * y) \Rightarrow def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y + 1) * (y + 1))[x + 2 * y + 1/x]$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y + 1) * (y + 1))[x + 2 * y + 1/x]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

$(x + 2 * y + 1) = (y + 1) * (y + 1)$

$\equiv$ {calcolo}

$(x + 2 * y + 1) = (y * y + 2 * y + 1)$

$\equiv$ {**Ip:** $x = y * y$}

T

3. $\{n > 0 \ \wedge \ y = x * n\}$
$y, x := y + n, x + 1$
$\{y = x * n\}$

Allora, per la Regola dell'Assegnamento, ci riduciamo a dimostrare che:

$n > 0 \ \wedge \ y = x * n \Rightarrow def(y + n) \wedge def(x + 1) \wedge (y = x * n)[y + n/y, x + 1/x]$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(y + n) \wedge def(x + 1) \wedge (y = x * n)[y + n/y, x + 1/x]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

$y + n = (x + 1) * n$

$\equiv$ {calcolo}

$y + n = x * n + n$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $y = x * n\}$

T

4. $\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)\}$
   $sum := sum + x; x := x + 1$
   $\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(4.1) $\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)\}$
$sum := sum + x$
$\{R\}$

(4.2) $\{R\}$
$x := x + 1$
$\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (4.2) è verificata per il seguente valore di R:

$def(x + 1) \wedge sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)[x + 1/x]$

$\equiv$ $\{$definizione di *def* e sostituzione$\}$

$sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x + 1)\,.\,i)$

Per verificare (4.1), per la Regola dell'Assegnamento, con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i) \Rightarrow def(sum + x) \wedge (sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x + 1)\,.\,i))[sum + x/sum]$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, usando la premessa come ipotesi e notando che $def(sum + x) \equiv \mathbf{T}$:

$sum + x = (\Sigma i\colon i \in [0, x + 1)\,.\,i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $sum = (\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i)\}$

$(\Sigma i\colon i \in [0, x)\,.\,i) + x = (\Sigma i\colon i \in [0, x + 1)\,.\,i)$

$\equiv$ $\{$(Legge dell'intervallo per la sommatoria)$\}$

T

ESERCIZIO 2 Si dica se le seguenti triple sono verificate oppure no (A e B sono variabili di specifica). Motivare formalmente le risposte.

1. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z := x + y; \quad y := y - z\ \{y < 0\}$,
2. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z, y := x + y, y - z\ \{y < 0\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z := x + y; \quad y := y - z\ \{y < 0\}$,

   Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

   (1.1) $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B\}\ z := x + y\ \{R\}$

   (1.2) $\{R\}\ y := y - z\ \{y < 0\}$

   Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (4.2) è verificata per il seguente valore di R:

   $def(y - z) \wedge (y < 0)[(y - z)/y]$

   $\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

   $(y - z < 0)$

   Per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (4.1) con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

   $(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B) \Rightarrow def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$

   Partiamo dalla conseguenza:

   $def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$

   $\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

   $y - (x + y) < 0$

   $\equiv$ {calcolo}

   $-x < 0$

   $\equiv$ {**Ip:** $x = A \wedge A \geq B \wedge B > 0$}

   T

2. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z, y := x + y, y - z\ \{y < 0\}$

   Abbiamo qui un caso di Assegnamento Multiplo e non Semplice, che prevede di valutare tutte le espressioni **prima** di tutti gli assegnamenti. Applicando la regola dell'Assegnamento Multiplo ci riduciamo a verificare:

   $$(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0) \Rightarrow$$
   $$def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$$

   Partiamo dalla conseguenza:

   $def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$

   $\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

   $y - z < 0$

   $\equiv$ {**Ip:** $y = B \wedge z = 0$)}

   $B < 0$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $B > 0\}$

F

Quindi la tripla non è verificata.

ESERCIZIO 3 Si verifichi la seguente tripla.

$\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$
if $x \,\%\, 6 = 0$ **then** y := y + x **else** skip **fi**;
x := x + 1
$\{y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(3.1) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$ **if** $x \,\%\, 6 = 0$ **then** $y := y + x$ **else** *skip* **fi** $\{R\}$

(3.2) $\{R\}$ $x := x + 1$ $\{y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (3.2) è verificata per R uguale a:

$$def(x + 1) \wedge (y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))[x + 1/x]$$

Quindi semplificando, abbiamo che R è:

$$(y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$$

Per la (3.1), applichiamo la Regola del Condizionale, per la quale dobbiamo verificare che

(3.1.1) $x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \Rightarrow def(x \,\%\, 6 = 0)$

ovvia essendo $def(x \,\%\, 6 = 0) \equiv \mathbf{T}$

(3.1.2) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge (x \,\%\, 6 = 0)\}$ $y := y + x$ $\{R\}$

(3.1.3) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge \neg(x \,\%\, 6 = 0)\}$ skip $\{R\}$

Per la (3.1.2), usiamo la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo dimostrare, ignorando $def(y + x)$ che è equivalente a $\mathbf{T}$, l'implicazione

$$(x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge (x \,\%\, 6 = 0))$$
$$\Rightarrow$$
$$(y + x = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$$

Partiamo dalla conclusione:
$y + x = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$
$\equiv$ $\{$**Ip:** $x \,\%\, 6 = 0$, (Intervallo-Σ)$\}$
$y + x = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)) + x$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

$y + x = y + x$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

T

Per la (3.1.3), applichiamo l'Assioma del Comando Vuoto e la Regola PRE e ci riduciamo a dimostrare che:

$$x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge \neg(x \,\%\, 6 = 0) \;\Rightarrow\; y = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$$

Partiamo dalla conclusione

$y = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $x \,\%\, 6 \neq 0$, (Intervallo-Σ)$\}$

$y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

T

ESERCIZIO 4 Si forniscano due espressioni E_1 ed E_2 in modo che la seguente tripla (A e B sono variabili di specifica) sia verificata e si dimostri formalmente la correttezza della soluzione proposta. Si ricordi che le variabili di specifica non possono comparire in un comando.

$\{x = A \wedge y = B\}$
if $x \leq y$ **then** $x := E_1$ **else** $x := E_2$ **fi**
$\{x > A \wedge x > B\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Esaminando la tripla, ci si convince facilmente che E_1 deve essere un valore strettamente maggiore del valore iniziale di y, cioè B, mentre E_2 deve essere strettamente maggiore del valore iniziale di x, cioè A. Poiché A e B sono variabili di specifica non possiamo usarle direttamente nel programma, ma possiamo usare $E_1 = y + 1$ ed $E_2 = x + 1$.

Per la Regola del Condizionale dobbiamo verificare i seguenti punti:

(4.1) $\big(x = A \wedge y = B\big) \;\Rightarrow\; def(x \leq y)$

Ovvia, per la definizione di def.

(4.2)
$\{x = A \wedge y = B \wedge x \leq y\}$
$x := y + 1$
$\{x > A \wedge x > B\}$

Per la regola (ASS) dobbiamo dimostrare che

$$x = A \wedge y = B \wedge x \leq y \;\Rightarrow\; def(y+1) \wedge (x > A \wedge x > B)[y+1/_x]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(y+1) \wedge (x > A \wedge x > B)[y+1/_x]$

$\equiv$ $\{$ sostituzione$\}$

$$
\begin{array}{ll}
 & def(y+1) \wedge y+1 > A \wedge y+1 > B \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } y = B\ \} \\
 & y+1 > A \wedge B+1 > B \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } x = A\} \\
 & y+1 > x \wedge B+1 > B \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } x \leq y\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

(4.3)
$$
\begin{array}{l}
\{x = A \wedge y = B \wedge x > y\} \\
\quad x := x+1 \\
\{x > A \wedge x > B\}
\end{array}
$$

Per la regola (ASS) dobbiamo dimostrare che

$$x = A \wedge y = B \wedge x > y \ \Rightarrow\ def(x+1) \wedge (x > A \wedge x > B)[x+1/_x]$$

La dimostrazione è analoga a quella mostrata nel caso (4.2)

ESERCIZIO 5 Si verifichi la seguente tripla.

$\{x = A \ \wedge\ y = B \ \wedge\ A > 0 \ \wedge\ B > 0 \ \wedge\ mcd(x,y) = mcd(A,B)\}$
if $x = y$ **then** skip **else if** $x > y$ **then** $x := x - y$ **else** $y := y - x$ **fi fi**
$\{mcd(x,y) = mcd(A,B)\}$

Si ricordano le proprietà dell'operatore *mcd*:

$$
mcd(n,m) = \begin{cases} n & \text{se} \quad n = m \\ mcd(n-m,m) & \text{se} \quad n > m \\ mcd(n,m-n) & \text{se} \quad n < m \end{cases}
$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5
Per la Regola del Condizionale dobbiamo verificare i seguenti punti:

(5.1) $\big(x = A \ \wedge\ y = B \ \wedge\ A > 0 \ \wedge\ B > 0 \ \wedge\ mcd(x,y) = mcd(A,B)\big) \ \Rightarrow\ def(x = y)$

Ovvia, per la definizione di *def*.

(5.2)
$$
\begin{array}{l}
\{x = A \ \wedge\ y = B \ \wedge\ A > 0 \ \wedge\ B > 0 \ \wedge\ mcd(x,y) = mcd(A,B) \wedge \mathrm{x = y}\} \\
\quad \text{skip} \\
\{mcd(x,y) = mcd(A,B)\}
\end{array}
$$

Ovvia per la regola (SKIP).

(5.3)
$$
\begin{array}{l}
\{x = A \ \wedge\ y = B \ \wedge\ A > 0 \ \wedge\ B > 0 \ \wedge\ mcd(x,y) = mcd(A,B) \wedge x \neq y\} \\
\quad \textbf{if } x > y \textbf{ then } x := x - y \textbf{ else } y := y - x \textbf{ fi} \\
\{mcd(x,y) = mcd(A,B)\}
\end{array}
$$

Per la (5.3) applicando di nuovo la Regola del Condizionale dobbiamo verificare:

(5.3.1) $$\big(x = A \wedge y = B \wedge A > 0 \wedge B > 0 \wedge mcd(x,y) = mcd(A,B) \wedge x \neq y\big) \;\Rightarrow\; def(x > y)$$

Ovvia, per la definizione di *def*.

(5.3.2)
$$\{x = A \;\wedge\; y = B \;\wedge\; A > 0 \;\wedge\; B > 0 \;\wedge\; mcd(x,y) = mcd(A,B) \;\wedge\; x \neq y \;\wedge\; x < y\}$$
$$x := x - y$$
$$\{mcd(x,y) = mcd(A,B)\}$$

(5.3.3)
$$\{x = A \;\wedge\; y = B \;\wedge\; A > 0 \;\wedge\; B > 0 \;\wedge\; mcd(x,y) = mcd(A,B) \;\wedge\; x \neq y \;\wedge\; \neg(x < y)\}$$
$$y := y - x$$
$$\{mcd(x,y) = mcd(A,B)\}$$

Verifichiamo la (5.3.2) (la (5.3.3) è del tutto analoga). Chiamando P la premessa della (5.3.2), per la regola dell'assegnamento, dobbiamo dimostrare che

$$P \;\Rightarrow\; def(x-y) \wedge (mcd(x,y) = mcd(A,B))[^{x-y}/_{x}]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$\begin{aligned}
& def(x-y) \wedge (mcd(x,y) = mcd(A,B))[^{x-y}/_{x}] \\
\equiv \quad & \{\text{sostituzione, definizione di } def\} \\
& mcd(x-y,y) = mcd(A,B) \\
\equiv \quad & \{\textbf{Ip: } x > y, \text{ Proprietà di } mcd\text{: } x > y \Rightarrow mcd(x,y) = mcd(x-y,y)\} \\
& mcd(x,y) = mcd(A,B) \\
\equiv \quad & \{\textbf{Ip: } mcd(x,y) = mcd(A,B)\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$