

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18

Quinta esercitazione – 23/11/2017 – Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1 Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **bar** e **foo** siano due array con dominio rispettivamente $[0, n)$ e $[0, m)$:

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**
2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**
3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.
4. Il numero di elementi dell'array **bar** che sono uguali all'elemento successivo è minore della somma degli elementi dell'array **foo** che sono uguali al doppio dell'elemento precedente
5. Ogni elemento dell'array **foo** di posizione pari è il triplo di un elemento dell'array **bar**, mentre tutti gli altri sono minori di tutti gli elementi di **bar**

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**

$$\#\{x : x \in [0, n) \mid \mathbf{bar}[x] < (\min y : y \in [0, m) . \mathbf{foo}[y])\} \leq 1$$

2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**

$$(m > 0) \Rightarrow \mathbf{foo}[0] = 2 \times (\sum x : x \in [0, n) \wedge \text{pari}(\mathbf{bar}[x]) . \mathbf{bar}[x])$$

3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

$$(\forall x . x \in [0, n - 1) \Rightarrow \mathbf{bar}[x] < \mathbf{bar}[x + 1]) \wedge (\forall x . x \in [0, m - 1) \Rightarrow \mathbf{foo}[x] < \mathbf{foo}[x + 1])$$

$$\wedge ((n > 0) \wedge (m > 0) \Rightarrow \mathbf{bar}[n - 1] < \mathbf{foo}[0])$$

4. Il numero di elementi dell'array **bar** che sono uguali all'elemento successivo è minore della somma degli elementi dell'array **foo** che sono uguali al doppio dell'elemento precedente

$$\#\{i : i \in [0, n - 1) \mid \mathbf{bar}[i] = \mathbf{bar}[i + 1]\} < (\sum j : j \in (0, m) \wedge \mathbf{foo}[j] = 2 * \mathbf{foo}[j - 1] . \mathbf{foo}[j])$$

5. Ogni elemento dell'array **foo** di posizione pari è il triplo di un elemento dell'array **bar**, mentre tutti gli altri sono minori di tutti gli elementi di **bar**

$$(\forall x . x \in [0, m) \Rightarrow (\text{pari}(x) \Rightarrow (\exists y . y \in [0, n) \wedge \mathbf{foo}[x] = 3 * \mathbf{bar}[y])) \wedge (\text{dispari}(x) \Rightarrow (\forall y . y \in [0, n) \Rightarrow \mathbf{foo}[x] < \mathbf{bar}[y])))$$

ESERCIZIO 2 Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

7	6	11	4
---	---	----	---

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\sum x : x \in [0, 4) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) \quad \equiv \quad m = 34$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$\begin{aligned} m &= (\sum x : x \in [0, 3) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \text{pari}(\mathbf{a}[3])\} \\ & m = (\sum x : x \in [0, 2) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) + 9 \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \neg\text{pari}(\mathbf{a}[2])\} \\ & m = (\sum x : x \in [0, 1) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) + 9 \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \text{pari}(\mathbf{a}[1])\} \\ & m = (\sum x : x \in [0, 0) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) + 9 + 25 \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \neg\text{pari}(\mathbf{a}[0])\} \\ & m = (\sum x : x \in [0, 0) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[x]) . (\mathbf{a}[x] - 1)^2) + 34 \\ \equiv & \quad \{(\Sigma\text{-vuoto})\} \\ & m = 34 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3 Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 5)$:

5	2	4	0	3
---	---	---	---	---

Si spieghi a parole cosa calcola la seguente formula e si dica quanto vale k :

$$k = (\sum x : x \in [0, 5) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5) \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . x)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

La formula dice che k è la somma degli indici degli elementi di **a** che se contengono un valore del dominio di **a** allora l'elemento in quella posizione è un numero pari. Quindi $k = 0 + 1 + 4 = 5$. Formalmente abbiamo che

$$\begin{aligned} k &= (\sum x : x \in [0, 5) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5) \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . x) \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \mathbf{a}[4] = 3 \in [0, 5) \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[3]), \text{quindi l'implicazione è vera per } x \mapsto 4\} \\ & k = (\sum x : x \in [0, 4) \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5) \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]])) . x) + 4 \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \mathbf{a}[3] = 0 \in [0, 5) \wedge \neg\text{pari}(\mathbf{a}[0]), \text{quindi l'implicazione è falsa per } x \mapsto 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k = (\Sigma x : x \in [0, 3] \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5] \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]]))). x + 4 \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \mathbf{a}[2] = 4 \in [0, 5] \wedge \neg \text{pari}(\mathbf{a}[4])\} \\
& k = (\Sigma x : x \in [0, 2] \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5] \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]]))). x + 4 \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \mathbf{a}[1] = 2 \in [0, 5] \wedge \text{pari}(\mathbf{a}[2])\} \\
& k = (\Sigma x : x \in [0, 1] \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5] \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]]))). x + 4 + 1 \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \neg \mathbf{a}[0] \in [0, 5], \text{ quindi l'implicazione è vera per } x \mapsto 0\} \\
& k = (\Sigma x : x \in [0, 0] \wedge (\mathbf{a}[x] \in [0, 5] \Rightarrow \text{pari}(\mathbf{a}[\mathbf{a}[x]]))). x + 0 + 4 + 1 \\
\equiv & \{(\Sigma\text{-vuoto})\} \\
& k = 5
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4 Dimostrare la seguente formula usando le ipotesi non tautologiche e la legge dell'intervallo per la sommatoria:

$$\begin{aligned}
m &= (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y) \Rightarrow \\
& m + a[z] + 2 * z = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y)
\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza usando la premessa come ipotesi non tautologica:

$$\begin{aligned}
& m + a[z] + 2 * z = \underline{(\Sigma y : y \in [0, z] . a[y])} + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
& m + a[z] + 2 * z = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + a[z] + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y) \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
& m + 2 * z = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * \underline{(\Sigma y : y \in [0, z] . y)} \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
& m + 2 * z = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * ((\Sigma y : y \in [0, z] . y) + z) \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
& m = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y) \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: m = (\Sigma y : y \in [0, z] . a[y]) + 2 * (\Sigma y : y \in [0, z] . y)\}
\end{aligned}$$

T

ESERCIZIO 5 Usando le ipotesi non tautologiche e le opportune leggi dell'intervallo, dimostrare la seguente formula assumendo che gli array \mathbf{a} e \mathbf{b} abbiano dominio $[0, n]$ e che $x \in (0, n)$:

$$\begin{aligned}
& (\forall i . i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i] . \mathbf{a}[j])) \wedge \mathbf{b}[x] = \mathbf{b}[x - 1] + \mathbf{a}[x] \Rightarrow \\
& (\forall i . i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i] . \mathbf{a}[j]))
\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza usando la premessa come ipotesi non tautologica:

$$\begin{aligned}
& (\forall i. i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i]. \mathbf{a}[j])) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall), x > 0\} \\
& (\forall i. i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i]. \mathbf{a}[j])) \wedge \mathbf{b}[x] = (\Sigma j : j \in [0, x]. \mathbf{a}[j]) \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i]. \mathbf{a}[j])), (\text{Unit\`a})\} \\
& \mathbf{b}[x] = (\Sigma j : j \in [0, x]. \mathbf{a}[j]) \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: \mathbf{b}[x] = \mathbf{b}[x - 1] + \mathbf{a}[x]\} \\
& \mathbf{b}[x - 1] + \mathbf{a}[x] = (\Sigma j : j \in [0, x]. \mathbf{a}[j]) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
& \mathbf{b}[x - 1] + \mathbf{a}[x] = (\Sigma j : j \in [0, x). \mathbf{a}[j]) + \mathbf{a}[x] \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
& \mathbf{b}[x - 1] = (\Sigma j : j \in [0, x - 1]. \mathbf{a}[j]) \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, x] \Rightarrow \mathbf{b}[i] = (\Sigma j : j \in [0, i]. \mathbf{a}[j])), (\text{Elim-}\forall), x > 0 \text{ e quindi } x - 1 \in [0, x)\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}$$