# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18

## Quarta esercitazione 14-15 novembre 2017– Soluzioni Proposte

**Attenzione:** Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

**ESERCIZIO 1**
Assumendo che $P$, $Q$ e $R$ contengano la variabile libera $x$, si provi che la seguente formula è valida, utilizzando la regola della **Skolemizzazione**

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \land \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \land (\exists x.P(x)) \ \Rightarrow \ (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 1**
Utilizzando la regola della **Skolemizzazione** (si veda la Tabella delle Leggi pubblicata sul sito) è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \land \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \land (\exists x.P(x)) \land P(a) \ \Rightarrow \ (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))$$

con $a$ costante nuova. Intuitivamente, è come chiamare $a$ un elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.P(x))$. Usiamo $P(a)$ per denotare $P(x)[a/x]$ cioè la formula $P(x)$ dove $x$ è sostituita con $a$. Partiamo allora dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \land \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \land \underline{(\exists x.P(x)) \land P(a)} \\
\Rightarrow & \{(\text{sempl-}\land),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x))} \land \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \land P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{(P(a) \Rightarrow Q(a))} \land \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \land \underline{P(a)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \land \underline{\neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x)))} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}),\ (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & Q(a) \ \land \ \underline{(\forall x.R(x) \Rightarrow \neg Q(x))} \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & Q(a) \ \land \ \underline{(R(a) \Rightarrow \neg Q(a))} \\
\equiv & \{(\text{elim-} \Rightarrow )\} \\
 & Q(a) \land (\neg R(a) \lor \neg Q(a)) \\
\equiv & \{(\text{complemento})\} \\
 & Q(a) \land \neg R(a) \\
\equiv & \{(\neg\text{-} \Rightarrow ),\ \text{al contrario}\} \\
 & \underline{\neg(Q(a) \ \Rightarrow \ R(a))} \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists),\ \text{occ. pos.}\} \\
 & (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x))
\end{array}$$

**ESERCIZIO 2**
Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

1. $\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$
2. $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$
3. $\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x))$
4. $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$
5. $(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,P)) \;\Rightarrow\; (\forall y\,.\,(\exists x.P))$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 2**

1. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\underline{\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x))} \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x))$$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

$$(\forall x.\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x))$$

$\equiv \quad \{(\forall : \wedge)\}$

$$(\forall x.\underline{(\neg P(x) \vee Q(x))} \wedge (\neg P(x) \Rightarrow R(x))$$

$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\}$

$$(\forall x\,.\,\underline{(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge (\neg P(x) \Rightarrow R(x)})$$

$\Rightarrow \quad \{(\text{transitività}), \text{ occ. pos.}\}$

$$(\forall x\,.\,\underline{\neg Q(x) \Rightarrow R(x)})$$

$\equiv \quad \{(\text{contropositiva})\}$

$$(\forall x\,.\,\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$$

Otteniamo cioè la conclusione.

2. Dobbiamo dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

Vediamo due possibili soluzioni.

[**Con Skolemizzazione**] Usando la regola della **(Skolemizzazione-$\Rightarrow$)**, è sufficiente dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

dove $a$ è una costante nuova. Intuitivamente, è come se chiamassimo $a$ un ipotetico elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))$.

Parto dalla premessa:

$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \underline{(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S(a)} \wedge R(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{sempl-}\wedge), \text{ occ. pos.}\}$

$\underline{(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x))} \wedge \neg S(a) \wedge R(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{elim-}\forall), \text{ occ. pos.}\}$

$\underline{(R(a) \Rightarrow Q(a))} \wedge \neg S(a) \wedge \underline{R(a)}$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Modus Ponens}), \text{ occ.pos. }\}$

$Q(a) \wedge \neg S(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Intro-}\exists)\}$

$(\exists x\,.\,Q(x) \wedge \neg S(x))$

$\equiv \quad \{(\text{Doppia negazione}),(\text{De Morgan})\}$

$\neg(\forall x\,.\,\underline{\neg(Q(x) \wedge \neg S(x))})$

$\equiv \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow) \text{ al contrario, (Doppia negazione)}\}$

$\neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

Otteniamo cioè la conclusione.

**[Con eliminazione dell'implicazione]**

$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\}$

$\neg((\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))) \vee \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), \text{ due volte}\}$

$\neg(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \neg(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \vee (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow S(x)))$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}) \text{ due volte}, (\neg - \Rightarrow)\}$

$(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow Q(x))) \vee (\forall x.\neg(\neg S(x) \wedge R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x))$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), (\neg - \Rightarrow)\}$

$(\exists x.R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x))$

$\equiv \quad \{(\text{commutatività}), (\exists : \vee)\}$

$(\exists x.(R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\equiv \quad \{(\text{Doppia negazione}), (\text{De Morgan})\}$

$\neg(\forall x.\neg\big((R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))\big)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

$\neg(\forall x.(\neg R(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\Leftarrow \quad \{(\text{risoluzione}), \text{ con occ. negativa}\}$

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall x.\neg R(x) \vee S(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x)) \\
\equiv \quad & \{(\text{terzo escluso})\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

Abbiamo dimostrato che la formula è valida perché è implicata da $\mathbf{T}$.

3. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$
\begin{aligned}
& \big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan})\} \\
& \big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \big(\forall x\,.\,\neg A(x) \wedge \neg(\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \\
\equiv \quad & \{(\neg\text{–} \Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
& \big(\forall x\,.\,(B(x) \wedge A(x))\big) \vee \big(\forall x\,.\,\neg A(x) \wedge (\neg B(x) \wedge \neg A(x))\big) \\
\Rightarrow \quad & \{(\forall : \vee), (\text{idempotenza}), \text{occ. pos. }\} \\
& \big(\forall x\,.\,(B(x) \wedge A(x)) \vee (\neg A(x) \wedge \neg B(x))\big) \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{sempl-}\wedge) \text{ due volte, occ. pos. }\} \\
& \big(\forall x\,.\,B(x) \vee \neg A(x)\big) \\
\equiv \quad & \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
& \big(\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x)\big)
\end{aligned}
$$

Arriviamo cioè alla conclusione desiderata.

4. Dobbiamo dimostrare che

$$
(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))
$$

Per la regola **(Skolemizzazione-$\Rightarrow$)** è sufficiente dimostrare allora che

$$
(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))
$$

con $a$ nuova costante. Partiamo dalla premessa:

$$
\begin{aligned}
& (\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{sempl-}\wedge), \text{ occ. pos.}\} \\
& (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{elim-}\Rightarrow), (\text{elim-}\forall), \text{ occ. pos.}\} \\
& (\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg(P(a) \vee Q(a)) \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan})\} \\
& (\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a) \\
\equiv \quad & \{(\text{complemento})\}
\end{aligned}
$$

$\neg R(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{sempl-}\wedge), \text{ occ.pos.}\}$

$\neg Q(a) \wedge \neg R(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{intro-}\vee), \text{ occ. pos.}\}$

$\neg(Q(a) \vee R(a)) \vee \neg P(a)$

$\equiv \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\}$

$Q(a) \vee R(a) \Rightarrow \neg P(a)$

$\Rightarrow \quad \{(\text{intro-}\exists, \text{ occ.pos.})\}$

$(\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

5. Per dimostrare $(\exists x \,.\, (\forall y \,.\, P)) \;\Rightarrow\; (\forall y \,.\, (\exists x.P))$, per Skolemizzazione è sufficiente dimostrare:

   $(\exists x \,.\, (\forall y \,.\, P)) \wedge (\forall y \,.\, P[^a/_x]) \;\Rightarrow\; (\forall y \,.\, (\exists x.P))$

   Infatti,

   $(\exists x \,.\, (\forall y \,.\, P)) \wedge (\forall y \,.\, P[^a/_x])$

   $\Rightarrow \quad \{(\text{Sempl-}\wedge)\}$

   $(\forall y \,.\, P[^a/_x])$

   $\Rightarrow \quad \{(\text{intro-}\exists), \text{ occorrenza positiva}\}$

   $(\forall y \,.\, (\exists x \,.\, P))$

   Alternativamente, per *Generalizzazione*, è sufficiente dimostrare $(\exists x \,.\, (\forall y \,.\, P)) \Rightarrow (\exists x \,.\, P[^a/_y]))$, dove $a$ è una nuova costante. Ma questa formula è banalmente valida poiché è ottenibile della legge (Elim-$\forall$) applicata ad un'occorrenza positiva .

**ESERCIZIO 3**
Dimostrare che le seguenti formule **non sono valide**:

1. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x \,.\, Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, P(x))$

2. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x \,.\, P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q(x))$

3. $(\forall y \,.\, (\exists x.P)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, (\forall y \,.\, P))$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 3**
Per dimostrare che una formula non è valida è sufficiente presentare un'interpretazione $I = (D, \alpha)$ che la rende falsa.

1. Per rendere falsa l'implicazione

$$\Phi = \big((\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x \,.\, Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, P(x))\big)$$

la conseguenza deve essere falsa (quindi $P$ deve essere interpretato come una proprietà falsa per tutti gli elementi del dominio, cioè $I_\rho[^d/_x](P(x)) = F$ per ogni $d \in D$), mentre la premessa deve essere vera (quindi $Q$ deve essere una proprietà vera per almeno un elemento del dominio, e l'implicazione $P \Rightarrow Q$ deve valere per tutti gli elementi di $D$). Consideriamo allora l'interpretazione $I_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

   - $\alpha(P)(n) = T$ se e solo se $n$ è un numero sia pari che dispari
   - $\alpha(Q)(n) = T$ se e solo se $n$ è un numero pari

   Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $I_{\mathbb{N}\rho}(\Phi) = F$ per qualunque $\rho$.

2. Si consideri l'interpretazione $I_\emptyset = (\emptyset, \alpha)$. Essendo il dominio vuoto, ogni formula quantificata universalmente è vera nell'interpretazione, mentre ogni formula quantificata esistenzialmente è falsa. Quindi qualunque sia l'interpretazione dei simboli di predicato $P$ e $Q$ abbiamo che $I_{\emptyset\rho}((\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x \,.\, Q(x))) = T$ e $I_{\emptyset\rho}((\exists x \,.\, Q(x))) = F$, quindi per la regola (S6) l'implicazione è falsa.

3. Anche questa formula è banalmente falsa in un'interpretazione in cui il dominio è vuoto.

**ESERCIZIO 4**
Dimostrare in modo formale che delle seguenti formule una è valida e l'altra no.

1. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 4**
Le due formule hanno la stessa premessa, pertanto partiamo da essa e semplifichiamo:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge ((\forall x.\neg R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \\
\Rightarrow & \{(\forall{:}\vee), \text{occ. pos.}\} \\
 & (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\forall x.\neg R(x) \vee Q(x)) \\
\equiv & \{(\forall{:}\wedge), (\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x)))
\end{array}
$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare le due formule seguenti:

1. $\Phi_1 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

2. $\Phi_2 = (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$

La formula $\Phi_1$ è valida, come si vede dall'applicazione del Principio di Risoluzione:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \\ \Rightarrow & \{\text{(risoluzione), occ. pos. }\} \\ & (\forall x.P(x) \vee Q(x)) \end{array}$$

Quindi, per come è formulato il testo dell'esercizio, la formula $\Phi_2$ non è valida: dobbiamo fornire un'interpretazione che la rende falsa. Un controesempio può essere costituito da un dominio in cui $Q$ e $R$ sono proprietà false per tutti gli elementi (rendendo falsa la conseguenza), mentre $P$ è vera per tutti gli elementi (e quindi la premessa diventa vera, considerando che la proprietà $\neg R$ è anch'essa vera per tutti gli elementi). Consideriamo allora l'interpretazione $I_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \alpha)$ dove $\mathbb{N}$ è l'inisieme dei naturali, e

- $\alpha(P)(n) = T$ se e solo se $n \geq 0$
- $\alpha(Q)(n) = T$ se e solo se $n < 0$
- $\alpha(R)(n) = T$ se e solo se $n < 0$

Si lascia al lettore il facile compito di verificare che $I_{\mathbb{N}\rho}(\Phi_2) = F$ per qualunque assegnamento $\rho$.