LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18
Seconda esercitazione - 10-11/10/2017 - Soluzioni Proposte

1. Come compaiono P e $P \Rightarrow Q$ nelle seguenti proposizioni? Positivamente o negativamente?

   (a) $\neg P \Rightarrow R$

   (b) $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

   (c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$

   (d) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$

   (e) $(\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow S) \Rightarrow (R \vee S)$

   (f) $(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S)$

   ALCUNE SOLUZIONI ESERCIZIO 1

   (a) $\neg P \Rightarrow R$

   Soluzione: Esiste una sola occorrenza di P che occorre positivamente. Infatti P occorre negativamente in $\neg P$, e a sua volta $\neg P$ occorre negativamente in $\neg P \Rightarrow R$: avendo incontrato un numero pari di occorrenze negative da P alla formula intera, concludiamo che l'occorrenza è positiva.

   Possiamo visualizzare meglio la soluzione sottolineando le occorrenze negative in cui compare P e contando le sottolineature, come illustrato di seguito:

   $$\underline{\neg \underline{P}} \Rightarrow R$$

   Poiché P ha due sottolineature, cioè un numero pari, occorre positivamente.

   (c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$: Questa formula è AMBIGUA, quindi sintatticamente errata. Pertanto non ha senso chiedersi se le occorrenze di certe sottoformule sono positive o negative.

   (e) Sottilineamo tutte le occorrenze negative nella formula:

   $$\underline{(\neg \underline{P} \vee Q) \wedge \neg\underline{(\underline{P} \Rightarrow Q)} \wedge (Q \Rightarrow S)} \Rightarrow (R \vee S)$$

   Si vede che la prima occorrenza di P occorre positivamente, avendo un numero pari di sottolineature, mentre la seconda negativamente perché ne ha un numero dispari. L'occorrenza di $P \Rightarrow Q$ occorre positivamente.

2. Nei seguenti passi di dimostrazione, indicare il connettivo logico corretto da sostituire a ⍰ applicando il Principio di Sostituzione dell'Implicazione. Motivare la risposta.

   (a) $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))$

   ⍰ $\{(\text{Semplificazione-}\wedge)\}$

   $P \Rightarrow \neg Q$

   (b) $(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

   ⍰ $\{(\text{Introduzione-}\vee)\}$

   $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(a) Per adoperare la legge (Semplificazione-$\wedge$): $A \wedge B \Rightarrow A$, possiamo partire dalla prima formula $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))$, applicandola a $Q \wedge (R \Rightarrow S)$ (quindi usando l'istanza della legge: $Q \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow Q$). Dato che la formula $Q \wedge (R \Rightarrow S)$ occorre negativamente abbiamo per il Principio di Sostituzione:

$$P \Rightarrow \neg\underline{(Q \wedge (R \Rightarrow S))}$$

$\Leftarrow$ $\{$(Semplificazione-$\wedge$) e $(Q \wedge (R \Rightarrow S))$ occorre negativamente in $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))\}$

$$P \Rightarrow \neg Q$$

(b) Per adoperare la legge (Introduzione-$\vee$): $A \Rightarrow A \vee B$, possiamo partire dalla seconda formula $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$, applicandola a P (quindi usando l'istanza della legge: $P \Rightarrow P \vee Q$). Dato che P occorre negativamente abbiamo per il Principio di Sostituzione:

$$\underline{P} \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

$\Leftarrow$ $\{$(Introduzione-$\vee$) e P occorre negativamente in $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\}$

$$(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

Ricordando che $a \Rightarrow b \equiv b \Leftarrow a$ otteniamo invertendo le formule del passaggio di dimostrazione precedente:

$$(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

$\Rightarrow$ $\{$(Introduzione-$\vee$) e P occorre negativamente in $P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\}$

$$\underline{P} \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

3. Applicare la legge *Modus Ponens* alla sottoformula sottolineata della seguente formula, e scrivere per esteso la formula risultante, la giustificazione e il connettivo.

$$R \wedge \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \wedge R$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Ricordiamo che il Modus Ponens prescrive che $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$, e osserviamo che la premessa del Modus Ponens compare nella sottoformula sottolineata con $A \equiv \neg P \vee Q$ e $B \equiv R$ (consideriamo $\neg P \vee Q$ e $Q \vee \neg P$ uguali perché differiscono solo per commutatività della disgiunzione). Osserviamo che la formula $(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)$ occorre negativamente nella formula $R \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R) \Rightarrow P \wedge R$. Quindi il passaggio di dimostrazione richiesto è il seguente:

$$R \wedge \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \wedge R$$

$\Leftarrow$ $\{$(Modus Ponens), occorrenza negativa$\}$

$$R \wedge R \Rightarrow P \wedge R$$

4. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando dimostrazioni per sostituzione con ipotesi non tautologiche.

(a) $(P \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

(b) $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(a) $(P \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

Per dimostrare la formula (a) possiamo possiamo dimostrare la conclusione $(P \Rightarrow S)$, usando le formule $(P \Rightarrow R \vee S)$ e $(R \Rightarrow S)$ come *ipotesi non tautologiche*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{P} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \textbf{Ip: } (P \Rightarrow R \vee S) \textbf{ e } P \textbf{ occorre positivamente in } P \} \\
 & \underline{R} \vee S \\
\Rightarrow & \qquad \{ \textbf{Ip: } (R \Rightarrow S) \textbf{ e } R \textbf{ occorre positivamente in } \mathrm{R} \vee \mathrm{S} \} \\
 & S \vee S \\
\equiv & \qquad \{ \text{(Idemp.)} \} \\
 & S
\end{array}
$$

(b) $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

Per dimostrare la formula (b) possiamo dimostrare la conclusione $(P \Rightarrow S)$, usando la formula $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S)$ come *ipotesi non tautologica*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{P} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \text{(Introduzione-}\vee\text{) e } P \text{ occorre positivamente} \} \\
 & \underline{P \vee Q} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \textbf{Ip: } (P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \textbf{ e } P \vee Q \textbf{ occorre positivamente in } \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \} \\
 & \underline{R \wedge S} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \text{(Semplificazione-}\wedge\text{) e } R \wedge S \text{ occorre positivamente in } R \wedge S \} \\
 & S
\end{array}
$$

(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Per dimostrare la formula (c) si possono impostare varie dimostrazioni. Nel seguito ne mostriamo alcune.

- Possiamo utilizzare la Legge di Sempl.-Sinistra-2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$. Quindi abbiamo che

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \qquad \{ \text{(Sempl.-Sinistra-2)} \} \\
 & (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)
\end{array}
$$

A questo punto, possiamo dimostrare la conclusione $P \Rightarrow R$ usando le formule $(P \Rightarrow Q)$ e $(Q \Rightarrow R)$ come *ipotesi non tautologiche*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{P} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \textbf{Ip: } (P \Rightarrow Q) \textbf{ e } P \textbf{ occorre positivamente} \} \\
 & \underline{Q} \\
\Rightarrow & \qquad \{ \textbf{Ip: } (Q \Rightarrow R) \textbf{ e } Q \textbf{ occorre positivamente} \} \\
 & R
\end{array}
$$

- Possiamo applicare la legge contronominale $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$. A questo punto possiamo dimostre la formula $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, usando $\neg Q \Rightarrow \neg P$ come *ipotesi non tautologica*. Per dimostrare $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ partiamo dalla premessa $(Q \Rightarrow R)$ per arrivare alla conclusione $(P \Rightarrow R)$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{Q \Rightarrow R} & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg Q} \lor R & \\
\Rightarrow & & \{\ \textbf{Ip: } \neg Q \Rightarrow \neg P \textbf{ e } \neg Q \textbf{ occorre positivamente in } \neg Q \lor R\} \\
 & \underline{\neg P \lor R} & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & P \Rightarrow R &
\end{array}
$$

5. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, senza usare le tabelle di verità. Per ogni tautologia cercare di trovare la tecnica di dimostrazione più adeguata.

   (a) $(P \land Q) \land (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \lor R)$

   (b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \lor S) \Rightarrow (R \land \neg S \Rightarrow \neg P)$

   (c) $\neg P \land (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$

   (d) $\neg((\neg Q \lor P) \land R) \land (P \lor Q \Rightarrow R) \ \Rightarrow \ (Q \Rightarrow \neg P)$

ALCUNE SOLUZIONI ESERCIZIO 5

(a) Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione $(P \land Q) \land (\neg Q \Rightarrow R)$ ed arrivando alla conclusione $(P \lor R)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & (P \land Q) \land (\underline{\neg Q \Rightarrow R}) & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow), (\text{Doppia Neg.})\} \\
 & P \land \underline{Q \land (Q \lor R)} & \\
\equiv & & \{(\text{Assorb.})\} \\
 & \underline{P \land Q} & \\
\Rightarrow & & \{(\text{Sempl.-}\land) \text{ dove } P \land Q \text{ occorre positivamente } \} \\
 & \underline{P} & \\
\Rightarrow & & \{(\text{Intro.-}\lor) \text{ dove } P \text{ occorre positivamente } \} \\
 & P \lor R &
\end{array}
$$

(b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \lor S) \Rightarrow (R \land \neg S \Rightarrow \neg P)$

Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \lor S$ ed arrivando alla conclusione $R \land \neg S \Rightarrow \neg P$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\underline{\neg P \Rightarrow Q}) \Rightarrow \neg R \lor S \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow) \text{ e } (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & \underline{P \lor Q \Rightarrow \neg R \lor S} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& \underline{\neg(P \vee Q)} \vee (\neg R \vee S) \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan})\} \\
& \underline{(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)} \\
\equiv \quad & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow) \text{ e } (\text{Doppia Negazione})\} \\
& \underline{\neg(\neg R \vee S)} \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan})\} \\
& (R \wedge \neg S) \Rightarrow \underline{(\neg P \wedge \neg Q)} \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{Semplificazione-}\wedge) \text{ dove } (\neg P \wedge \neg Q) \text{ occorre positivamente}\} \\
& (R \wedge \neg S) \Rightarrow \neg P
\end{aligned}
$$

(d) Si possono sviluppare varie dimostrazioni. Ne mostriamo alcune.

- Dimostriamo la formula partendo dalla premessa $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$ dell'implicazione ed arrivando alla conclusione $Q \Rightarrow \neg P$:

$$
\begin{aligned}
& \underline{\neg((\neg Q \vee P) \wedge R)} \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan})\} \\
& (\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (\underline{P \vee Q \Rightarrow R}) \\
\equiv \quad & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& \underline{(\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee R)} \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{Risoluzione}), \text{ occorrenza positiva}\} \\
& \underline{\neg(\neg Q \vee P)} \vee \underline{\neg(P \vee Q)} \\
\equiv \quad & \{(\text{De Morgan}), \text{ due volte}\} \\
& \underline{(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \\
\equiv \quad & \{(\text{Distributiva}), \text{ al contrario}\} \\
& \neg P \wedge (\underline{\neg Q \vee Q}) \\
\equiv \quad & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\
& \underline{\neg P \wedge \mathbf{T}} \\
\equiv \quad & \{(\text{Unità})\} \\
& \underline{\neg P} \\
\Rightarrow \quad & \{(\text{Introduzione-}\vee) \text{ e } \neg P \text{ occorre positivamente}\} \\
& \underline{\neg P \vee \neg Q} \\
\equiv \quad & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow), \text{ al contrario}\} \\
& Q \Rightarrow \neg P
\end{aligned}
$$

- Alternativamente possiamo sviluppare una dimostrazione usando le *ipotesi non tautologiche*. Cominciamo col semplificare la premessa:

$$\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$$

$\equiv$ {(De Morgan)}

$(\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

$\equiv$ {(elim-$\Rightarrow$), al contrario}

$(R \Rightarrow \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

$\equiv$ {(De Morgan), (Doppia Negazione)}

$(R \Rightarrow (Q \wedge \neg P)) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R)$

Possiamo dimostrare la formula (d) dimostrando la formula $Q \Rightarrow \neg P$, usando le formule $R \Rightarrow Q \wedge \neg P$ e $P \vee Q \Rightarrow R$ come *ipotesi non tautologiche*. Quindi partiamo da Q per derivare $\neg P$:

$\underline{Q}$

$\Rightarrow$ {(Intro-$\vee$) occorrenza positiva}

$\underline{P \vee Q}$

$\Rightarrow$ {**Ip:** $P \vee Q \Rightarrow R$, occorrenza positiva}

$\underline{R}$

$\Rightarrow$ {**Ip:** $R \Rightarrow Q \wedge \neg P$, occorrenza positiva}

$\underline{Q \wedge \neg P}$

$\Rightarrow$ {(Sempl. - $\wedge$) occorrenza positiva}

$\neg P$

6. Usando come ipotesi $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$, dimostrare per casi su Q che vale $(P \Rightarrow \neg Q \vee S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

- Caso $Q \equiv \mathbf{T}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito:

$$\begin{array}{lll} & P \Rightarrow \neg \underline{Q} \vee S & \\ \equiv & & \{\ \textbf{Ip:}\ Q \equiv \mathbf{T}\} \\ & P \Rightarrow \underline{\neg \mathbf{T} \vee S} & \\ \equiv & & \{(\text{T:F}), (\text{Unità})\} \\ & P \Rightarrow S & \end{array}$$

  Mentre la prima ipotesi si riduce così:

$$\begin{array}{lll} & P \wedge \underline{Q} \Rightarrow R & \\ \equiv & & \{\ \textbf{Ip:}\ Q \equiv \mathbf{T}\} \\ & \underline{P \wedge \mathbf{T}} \Rightarrow R & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & P \Rightarrow R & \end{array}$$

  A questo punto rimane da dimostrare la formula $P \Rightarrow S$, usando come ipotesi non tautologiche $(P \Rightarrow R)$ e $(R \Rightarrow S)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{P} \\
\Rightarrow & \{ \textbf{ Ip: } P \Rightarrow R \textbf{ occorrenza positiva } \} \\
 & \underline{R} \\
\Rightarrow & \{ \textbf{ Ip: } R \Rightarrow S \textbf{ occorrenza positiva} \} \\
 & S
\end{array}
$$

- Caso $Q \equiv \mathbf{F}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito.

$$
\begin{array}{lll}
 & P \Rightarrow \neg\underline{Q} \vee S & \\
\equiv & & \{ \textbf{ Ip: } Q \equiv \mathbf{F}\} \\
 & P \Rightarrow \underline{\neg\mathbf{F} \vee S} & \\
\equiv & & \{(\text{Zero}),(\text{F:T})\} \\
 & \underline{P \Rightarrow \mathbf{T}} & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-} \Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg P \vee \mathbf{T}} & \\
\equiv & & \{(\text{Zero}) \} \\
 & \mathbf{T} &
\end{array}
$$

Quindi in questo caso la formula è vera senza usare ulteriori ipotesi.

7. Si dica se le seguente proposizioni sono tautologie oppure no, motivando la risposta:

   (a) $(Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \wedge R)$

   (b) $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \vee \neg R)) \;\Rightarrow\; (R \Rightarrow P)$

   SOLUZIONE ESERCIZIO 7
   Nessuna delle due proposizioni è una tautologia. Lasciamo allo studente il compito di determinare un assegnamento di valori di verità alle variabili proposizionali che le rendono falsa. Per (b), ad esempio $P = \mathbf{F}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{T}$ fornisce il controesempio.