Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Logica del Primo Ordine con Insiemi ed Intervalli
- Formalizzazione di Enunciati: Array e Sequenze

Rappresentazioni Intensionali ed Estensionali di Insiemi

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione **estensionale** (*in extenso*) di insiemi

$$Divisori\_di\_30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- Rappresentazione **intensionale** (*in intenso*) di insiemi

$$Divisori\_di\_30 = \{k \mid k \leq 30 \wedge (\exists n \,.\, k \times n = 30)\}$$

- Rappresentazione **intensionale per insiemi infiniti**

$$Multipli\_di\_7 = \{k \mid (\exists n \,.\, k = n \times 7)\}$$

Notazione per Insiemi

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare **insiemi di naturali in modo intensionale**:

$$Term \quad ::= \quad Const \mid Var \mid FIde(Term\{, Term\}) \mid \{Var \mid Fbf\}$$

- Abbiamo termini come $\{x \mid P\}$ dove x è una variabile, e P una formula (solitamente con x libera). x è legata in $\{x \mid P\}$
- Nuovo simbolo di predicato binario $\in$, definito dalla legge:

$$y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x] \qquad \text{(def-}\in\text{)}$$

Insieme Vuoto

- Introduciamo la nuova costante $\emptyset$, definita come $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$
- Dimostriamo che $(\forall y. y \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$ è valida.
- Per la **Regola di Generalizzazione**, è sufficiente dimostrare $k \in \emptyset \equiv \mathbf{F}$ per una nuova costante k

$$
\begin{array}{ll}
 & k \in \emptyset \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \emptyset)\} \\
 & k \in \{x \mid \mathbf{F}\} \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Leggi per Insiemi

- Ricordiamo il **principio di estensionalità** degli insiemi e la definizione di inclusione: per ogni coppia di insiemi (A, B) vale
  - $(A = B) \equiv (\forall x \,.\, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - $(A \subseteq B) \equiv (\forall x \,.\, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Valgono le seguenti leggi:

$$(\forall x.P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\} \quad \text{(Ins-}\equiv\text{)}$$

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\} \quad \text{(Ins-} \Rightarrow \text{)}$$

- Dimostriamo la seconda

$$\begin{array}{ll}
 & z \in \{x \mid P\} \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & P[z/x] \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Ip: } \forall x.P \Rightarrow Q), (\text{Elim-}\forall)\} \\
 & Q[z/x] \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & z \in \{x \mid Q\}
\end{array}$$

Uguaglianze e Disuguaglianze

Estendiamo il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$.
I predicati $=, \leq, \geq$ soddisfano i seguenti assiomi (la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività-$=$)
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$ (simmetria-$=$)
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività-$=$)

- $x \leq x$ (riflessività-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimmetria-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività-$\leq$)
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (totalità-$\leq$)

- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$ (def-$\geq$)

I predicati $\leq, \geq, =$ legano meno dei connettivi logici: tutte le parentesi possono essere omesse

Un po' di Terminologia...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x \ R \ x$
  - simmetrica: $(x \ R \ y) \Rightarrow (y \ R \ x)$
  - transitiva: $(x \ R \ y) \wedge (y \ R \ z) \Rightarrow (x \ R \ z)$

  Esempio: l'uguaglianza $=$, l'equivalenza $\equiv$
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica

  $$(x \ R \ y) \wedge (y \ R \ x) \Rightarrow (x = y)$$

  Esempio: inclusione $\subseteq$ tra insiemi, $\leq$ su numeri naturali
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni x, y vale $(x \ R \ y) \vee (y \ R \ x)$

  Esempio: $\leq$ su numeri naturali

Intervalli: Notazione e Definizioni

- Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche, $a, b \in \mathbb{N}$:
  - $[a, b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
  - $[a, b) = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
  - $(a, b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
  - $(a, b) = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- Definizione di relazioni ausiliarie:

$$\boxed{x \neq y} \equiv \neg(x = y) \qquad (\text{def-}\neq)$$

$$\boxed{x < y} \equiv x \leq y \wedge x \neq y \qquad (\text{def-}<)$$

$$\boxed{x > y} \equiv x \geq y \wedge x \neq y \qquad (\text{def-}>)$$

- Esercizio: dimostrare le seguenti leggi:

$$x \geq y \equiv x > y \vee x = y \qquad (\text{elim-}\geq)$$

$$x \leq y \equiv x < y \vee x = y \qquad (\text{elim-}\leq)$$

Altre leggi su disuguaglianze

$$\neg(x \leq y) \equiv x > y \qquad (\neg\text{-}\leq)$$

$$\neg(x \geq y) \equiv x < y \qquad (\neg\text{-}\geq)$$

- Dimostriamo la prima **per assurdo**, cioè $(x \leq y \equiv x > y) \Rightarrow \mathbf{F}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & x \leq y \equiv x > y \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\equiv\text{-bis})\} \\
 & (x \leq y \wedge \underline{x > y}) \vee (\underline{\neg(x \leq y) \wedge \neg(x > y)}) \\
\equiv & \quad \{(\text{def-}>), (\text{De Morgan, al contrario})\} \\
 & (\underline{x \leq y \wedge x \geq y} \wedge x \neq y) \vee \neg(\underline{x \leq y} \vee x > y) \\
\Rightarrow & \quad \{\mathbf{Ip:}(\text{Antisimmetria})\ \text{occorrenza positiva},\ (\text{elim-}\leq)\} \\
 & (\underline{x = y \wedge x \neq y}) \vee \neg(x < y \vee \underline{x = y} \vee x > y) \\
\equiv & \quad \{(\text{Contraddizione}), (\text{Idempotenza})\} \\
 & \mathbf{F} \vee \neg(\underline{x < y \vee x = y} \vee \underline{x = y \vee x > y}) \\
\equiv & \quad \{(\text{unità}), (\text{elim-}\geq)\ \text{e}\ (\text{elim-}\leq), \text{al contrario}\} \\
 & \neg(x \leq y \vee x \geq y) \\
\equiv & \quad \{\mathbf{Ip:}\ (\text{Totalità})\} \\
 & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Quantificazione ristretta ad un Insieme: Domini

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$
$$(\exists x.P \wedge Q)$$

- In queste formule, la formula P è il dominio del quantificatore
- Si introducono le **seguenti abbreviazioni**:
  $(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x : P \,.\, Q)$
  $(\exists x \,.\, P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x : P \,.\, Q)$
- **Attenzione**: queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.

Formule Vacuamente Vere

- Sia P una formula con x libera, e $I = (\mathcal{D}, \alpha)$ un'interpretazione
- Diciamo che

  il dominio P **è vuoto in** I se vale $I_\rho[(\exists x.P)] = \mathbf{F}$ $\quad (\dagger)$
- Allora valgono i seguenti fatti:
  1. La formula $(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q)$ è **vacuamente** vera in I se il dominio P è vuoto in I.
  2. Dualmente, la formula $(\exists x \,.\, P \wedge Q)$ è **vacuamente** falsa in I se il dominio P è vuoto in I.
- Prima di dimostrare (1.) osserviamo che $(\dagger)$ può essere riformulato come:

  P è vuoto in I **se per ogni** $d \in \mathcal{D}$ **vale** $I_{\rho[d/x]}[P] = \mathbf{F}$ $\quad (\ddagger)$

  applicando (S3), (De Morgan) e (S8).

  Esercizio: verificare questa affermazione.

Formule Vacuamente Vere (2)

- Dimostriamo la (1.), mostriando che se P è vuoto in I, allora $I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q.

$$
\begin{array}{ll}
 & I_\rho[(\forall x.P \Rightarrow Q)] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & I_\rho[(\forall x.\neg P \vee Q)] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S8)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[\neg P \vee Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S5)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[\neg P] \equiv \mathbf{T} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{(\text{Regola (S3)})\} \\
 & \text{per ogni } d \in \mathcal{D},\ I_{\rho[d/x]}[P] \equiv \mathbf{F} \text{ oppure } I_{\rho[d/x]}[Q] \equiv \mathbf{T} \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } P \text{ vuoto, condizione } (\ddagger) \text{ della pagina precedente}\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

Estensione delle Leggi dei Quantificatori alle Formule con Domini

Molte delle leggi per i quantificatori valgono anche quando si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono sulla dispensa):

- $(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$ $(\forall : \wedge)$
- $\neg(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \neg P)$ (De Morgan)

Esercizio: si dimostrino queste leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio

Notazione per gli Intervalli

Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I, che noi eviteremo:

- $(\forall x \in I.Q)$ o $(\forall x : x \in I.Q)$ per $(\forall x.x \in I \Rightarrow Q)$
- $(\exists x \in I.Q(x))$ o $(\exists x : x \in I.Q)$ per $(\exists x.x \in I \wedge Q)$

Leggi per Quantificazioni su Domini

Sia **k** un termine chiuso, che denota un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione sul dominio P ad un dominio più piccolo $(P \wedge x \neq \mathbf{k})$:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (1)

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x. P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso}), (\text{Unità})\} \\
 & (\forall x. P \wedge (x = k \vee x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distrib.})\} \\
 & (\forall x. (P \wedge x = k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Dominio})\} \\
 & (\forall x. P \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Leibniz})\} \\
 & (\forall x. P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (2)

Procediamo per casi a dimostrare

$$(\forall x.P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

- $P[k/x] \equiv \mathbf{T}$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x.P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\textbf{Ip}: P[k/x] \equiv \mathbf{T}, \text{(Unità)}\} \\ & (\forall x.x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\text{(Singoletto)}\} \\ & Q[k/x] \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \end{array}$$

- $P[k/x] \equiv \mathbf{F}$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x.P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\textbf{Ip}: P[k/x] \equiv \mathbf{F}, \text{(Zero)}\} \\ & (\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}, \text{(costante)}, \text{(unità)}\} \\ & (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \end{array}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (1)

Presentiamo una specializzazione delle leggi precedenti, quando il dominio è un intervallo. Quindi la formula del dominio è $x \in [a, b)$:

$$(\forall x.x \in [a,b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.x \in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a,b) \\ (\forall x.x \in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a,b) \end{cases}$$

$$(\exists x.x \in [a,b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.x \in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a,b) \\ (\exists x.x \in [a,b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a,b) \end{cases}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (2)

- Altre leggi molto utili nel caso in cui il dominio sia $x \in [a, b]$ l'elemento sia proprio l'estremo dell'intervallo destro o sinistro

$$(\forall x \,.\, x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x . x \in [a, b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\forall x \,.\, x \in [a, b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x . x \in (a, b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x \,.\, x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x . x \in [a, b) \wedge P) \vee P[b/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x \,.\, x \in [a, b] \wedge P) \equiv (\exists x . x \in (a, b] \wedge P) \vee P[a/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

Specifiche con Array e Sequenze

- Un array a di lunghezza n è rappresentato da una **funzione dall'intervallo** $[0, n) = \{0, 1, ..., n-1\}$ ad $\mathbb{N}$
- Notazione: $a[i]$ indica il valore i-esimo della funzione (array) a
- Esempio: $a = \{\langle 0, 45\rangle, \langle 1, 23\rangle, \langle 2, 10\rangle, \langle 3, 16\rangle\}$

45	23	10	16

- Nota: il primo elemento ha posizione/indice 0: $a[0] = 45$

Esercizi di Formalizzazione (1)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- a è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall i . i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = 0)$$

- per ogni elemento di a esiste un elemento di b uguale o più grande

$$(\forall i . i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j . j \in [0, n] \wedge a[i] \leq b[j]))$$

Esercizi di Formalizzazione (2)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

1. a rappresenta una funzione monotona crescente
2. m è il massimo dell'array a
3. m è l'indice del massimo dell'array a
4. a ha tutti elementi distinti
5. a ha tutti elementi distinti e b è l'array a ordinato in senso crescente.