

Logica per la Programmazione

Lezione 6

- ▶ Logica del Primo Ordine
 - ▶ Motivazioni
 - ▶ Sintassi
 - ▶ Interpretazioni
 - ▶ Formalizzazione

Limiti del Calcolo Proporzionale

- ▶ Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli **enunciati atomici** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
- ▶ **Es: “Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo”**
Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
 - ▶ $AC \equiv$ Alberto va al cinema
 - ▶ $BC \equiv$ Bruno va al cinema
 - ▶ $AT \equiv$ Alberto va al teatro
 - ▶ $CT \equiv$ Carlo va al teatro
- ▶ Formula proposizionale: $(AC \wedge BC) \vee (AT \wedge CT)$
- ▶ Tuttavia, “Alberto”, “Bruno”, ... “cinema” ..., gli individui del nostro discorso e le relazioni tra di essi (“andare al”) scompaiono...

Limiti del Calcolo Proposizionale (2)

Le formule proposizionali possono descrivere **relazioni logiche tra un numero finito di enunciati**, ma

- ▶ Vorremmo esprimere proprietà di un' **infinità di individui**:
 - ▶ “tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”
In CP(?) (“4 non è primo”) \wedge (“6 non è primo”) \wedge ... **NO!**
 - ▶ “esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo”
In CP(?) (“3 non è primo”) \vee (“4 non è primo”) \vee ... **NO!**
- ▶ Vorremmo poter esprimere **proprietà “generalì”** come
“se x è pari allora $x+1$ è dispari”
... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come
“se 4 è pari allora 5 è dispari”

Limiti del Calcolo Proposizionale (3)

Anche se descriviamo **proprietà di un numero finito di enunciati** vorremmo descriverli in maniera **compatta**

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP vanno al cinema”**

In CP(?) $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}$

- ▶ **“tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema”**

In CP(?)

$$(\neg S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge \neg S_3 \wedge S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \neg S_4 \dots \wedge S_{150}) \vee$$

...

$$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \dots \wedge \neg S_{150})$$

Verso la Logica del Primo Ordine

- ▶ La **Logica del Primo Ordine** (LPO) estende (include) il **Calcolo Proporzionale**
- ▶ Con le formule di LPO
 - ▶ si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del **dominio di interesse** (gli individui, usando i **termini**)
 - ▶ si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
 - ▶ si può **quantificare** una formula, dicendo che vale **per almeno** un individuo, o **per tutti** gli individui (usando i **quantificatori**)

La Logica del Primo Ordine

- ▶ Presenteremo **Sintassi**, **Semantica** e **Sistema di Dimostrazioni**
- ▶ Useremo formule della LPO per formalizzare enunciati dichiarativi
- ▶ La **Semantica** di una formula di LPO è sempre un valore booleano assegnato in base ad una **Interpretazione** (ma determinato in modo molto più complesso!!!!)
- ▶ Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono “sempre vere” (**formule valide** analoghe alle **tautologie**)
- ▶ **Non esistono tabelle di verità**: per vedere se una formula è valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile trovare una dimostrazione)

Espressività della Logica del Primo Ordine

Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi:

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo

$$(\exists x. x > 2 \wedge \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se x è pari allora $x+1$ è dispari (*) $(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1))$
- ▶ (*) implica “se 4 è pari allora 5 è dispari”

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x + 1)) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5))$$

Logica del Primo Ordine: commenti

Nella Logica del Primo Ordine ci sono due categorie **sintattiche** e **semantiche** differenti

- ▶ i **termini** che sono passati come argomenti dei predicati e denotano **elementi del dominio di riferimento**
- ▶ le **formule** costruite a partire dai predicati e che assumono valore booleano

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: l'Alfabeto

Un **alfabeto** del primo ordine comprende:

- ▶ Un insieme \mathcal{V} di simboli di **variabile**
- ▶ Un insieme \mathcal{C} di simboli di **costante**
- ▶ Un insieme \mathcal{F} di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
- ▶ Un insieme \mathcal{P} di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà** (eventualmente 0)
- ▶ I simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \Leftarrow$ (**connettivi logici**)
- ▶ I simboli \forall, \exists (**quantificatori**)
- ▶ I simboli $()$ [parentesi] , [virgola] . [punto]

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: la Grammatica

Estende la grammatica del **Calcolo Proporzionale** con **nuove produzioni**

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf) \\
 Pred & ::= Plde \mid Plde(Term\{, Term\}) \\
 Term & ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})
 \end{aligned}$$

dove

- ▶ $Var \in \mathcal{V}$ è un simbolo di **variabile**,
- ▶ $Const \in \mathcal{C}$ è un simbolo di **costante**,
- ▶ $Flde \in \mathcal{F}$ è un simbolo di **funzione**, e
- ▶ $Plde \in \mathcal{P}$ è un simbolo di **predicato**.

Sintassi della Logica del Primo Ordine: i Termini

I **termini** denotano “elementi del dominio di interesse” (“individui”). Sono definiti dalla categoria sintattica *Term*:

$$Term ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\})$$

- ▶ Quindi i termini sono definiti **induttivamente**, a partire da un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} , nel modo seguente:
 - ▶ Ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ è un termine
 - ▶ Ogni **variabile** $x \in \mathcal{V}$ è un termine
 - ▶ Se $f \in \mathcal{F}$ è un **simbolo di funzione** con arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

Termini: Esempi

- ▶ a , con $a \in \mathcal{C}$
- ▶ x , con $x \in \mathcal{V}$
- ▶ $g(a)$, con $g \in \mathcal{F}$ di arietà 1
- ▶ $f(x, g(a))$, con $f \in \mathcal{F}$ di arietà 2
- ▶ **Notazione**: I ben noti simboli di funzione binari a volte sono rappresentati con notazione **infissa**.
- ▶ **Esempio**: $x + (1 * z)$, è un termine con $+, * \in \mathcal{F}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (1)

Le **formule** rappresentano enunciati dichiarativi. Sono definite **induttivamente** come segue, fissato un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} :

- ▶ Se $p \in \mathcal{P}$ è un **simbolo di predicato** allora
 - ▶ se ha arietà 0 allora p è una **formula**. Corrisponde a una **variabile proposizionale** nel CP, e lo scriviamo p invece di $p()$
 - ▶ se ha arietà $n > 0$ e t_1, \dots, t_n sono **termini** allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula**.

Queste sono le formule corrispondenti alla categoria sintattica *Pred*:

$$Pred := Plde \mid Plde(Term\{, Term\})$$

- ▶ A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2.
- ▶ Esempio: $x=y$ o $z \leq f(x)$ con $=, \leq, \in \mathcal{P}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (2)

Le rimanenti categorie sintattiche sono

$$\begin{aligned}
 Fbf & ::= \\
 & Fbf \equiv Fbf \mid Fbf \wedge Fbf \mid Fbf \vee Fbf \mid \\
 & Fbf \Rightarrow Fbf \mid Fbf \Leftarrow Fbf \\
 & Atom \mid \neg Atom \\
 Atom & ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Pred \mid (Fbf) \mid (FbfQuant) \\
 FbfQuant & ::= (\forall Var.Fbf) \mid (\exists Var.Fbf)
 \end{aligned}$$

e definiscono le formule induttivamente come segue

- ▶ **T** e **F** sono formule
- ▶ Se P è una formula allora $\neg P$ è una formula
- ▶ Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q, P \Leftarrow Q$ sono formule
- ▶ Se P è una formula e $x \in \mathcal{V}$, allora $(\forall x.P)$ e $(\exists x.P)$
- ▶ Se P è una formula allora anche (P) è una formula

Sintassi delle Formule: Esempi

- ▶ Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x. \text{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \text{primo}(x))$$

- ▶ Se x è pari allora il successore di x è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1))$$

- ▶ Se x è pari allora $x + 1$ è dispari” implica “se 4 è pari allora 5 è dispari

$$(\forall x. \text{pari}(x) \Rightarrow \text{dispari}(x+1) \Rightarrow (\text{pari}(4) \Rightarrow \text{dispari}(5)))$$

Simboli di Variabile? Simboli di Predicato? Simboli di Funzione? Simboli di Costante?

Occorrenze di Variabili Libere o Legate

- ▶ In una formula quantificata come $(\forall x.P)$ o $(\exists y.P)$ la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore.
- ▶ Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore altrimenti è detta **libera**.
- ▶ **Esempio:**

$$(\forall y.z = y \wedge (x = y \vee (\exists x.x = z \vee z = y)))$$

- ▶ Portata di $\forall y$?
- ▶ Portata di $\exists x$?
- ▶ Occorrenze di variabili **legate**?
- ▶ Occorrenze di variabili **libere**?

Formule Aperte e Chiuse

- ▶ Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle leggi di **ridenominazione**:

$$(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

$$(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) \quad \text{se } y \text{ non compare in } P \quad (\text{Ridenom.})$$

Attenzione: qui $P[y/x]$ rappresenta la formula P in cui TUTTE le occorrenze di x sono sostituite da y

- ▶ Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
- ▶ Spesso scriveremo $P(x)$ per indicare che x è libera nella formula P
- ▶ Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente **formule chiuse**.

Interpretazione e Semantica

- ▶ Come in Calcolo Proposizionale la semantica di una **formula chiusa** di LPO si determina rispetto ad una **interpretazione**
- ▶ Una **interpretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
 - ▶ Il **dominio** di interesse (un insieme)
 - ▶ A quali **elementi** del dominio corrispondono i **simboli di costante** in \mathcal{C}
 - ▶ A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i **simboli di funzione** in \mathcal{F}
 - ▶ A quali **proprietà** o **relazioni** corrispondono i **simboli di predicato** in \mathcal{P}
- ▶ Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore di verità della formula complessiva
- ▶ Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

Esempio: Semantica di Formula dipende da Interpretazione

- ▶ Consideriamo la formula chiusa:

$$(\forall x.p(x) \vee q(x))$$

- ▶ **Intepretazione 1:**

- ▶ Il **dominio** è quello degli esseri **umani**
- ▶ Il predicato p significa “essere maschio”
- ▶ Il predicato q significa “essere femmina”

La formula è vera

- ▶ **Intepretazione 2:**

- ▶ Il **dominio** è quello dei **numeri naturali**
- ▶ Il predicato p significa “essere numero primo”
- ▶ Il predicato q significa “essere numero pari”

La formula è falsa

Interpretazione: Definizione Formale

Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissato un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} , una **interpretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- ▶ Un insieme \mathcal{D} , detto **dominio dell'interpretazione**
- ▶ Una **funzione di interpretazione** α che associa:
 - ▶ ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio \mathcal{D} , rappresentato da $\alpha(c)$
 - ▶ ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n -upla di elementi di \mathcal{D} restituisce un elemento di \mathcal{D} . Ovvero

$$\alpha(f) = \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

- ▶ ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da $\alpha(p)$
- ▶ ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato n -ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n -upla di elementi di \mathcal{D} restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) = \mathcal{D}^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (1)

- ▶ Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la **definizione formale della semantica**
- ▶ Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
 - ▶ un **alfabeto** $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ e un'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
 - ▶ una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione \mathcal{I} , sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (2)

Dato un enunciato \mathbf{E} , per identificare l'alfabeto \mathcal{A} e l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$

- ▶ individuiamo il **dominio** \mathcal{D} di cui parla l'enunciato
- ▶ per ogni individuo $d \in \mathcal{D}$ menzionato in \mathbf{E} , introduciamo un simbolo di **costante** $c \in \mathcal{C}$ e fissiamo $\alpha(c) = d$
- ▶ per ogni operatore **op** menzionato in \mathbf{E} che applicato a elementi di \mathcal{D} restituisce un individuo di \mathcal{D} , introduciamo un simbolo di **funzione** $f \in \mathcal{F}$ e fissiamo $\alpha(f) = \mathbf{op}$
- ▶ per ogni proprietà di individui o relazione tra individui \mathbf{R} menzionata in \mathbf{E} , introduciamo un simbolo di **predicato** $p \in \mathcal{P}$ e fissiamo $\alpha(p) = \mathbf{R}$

Formalizzazione di Enunciati: Esempio

“Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi”

- ▶ Dominio: numeri naturali: \mathbb{N}
- ▶ Elementi del dominio menzionati: “due”
 - ▶ Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in \mathcal{C}$ con $\alpha(\mathbf{2}) = \underline{2} \in \mathbb{N}$
- ▶ Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
 - ▶ “ n è pari”: introduciamo $\mathbf{pari} \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari, \mathbf{F} altrimenti
 - ▶ “ n è primo”: introduciamo $\mathbf{primo} \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{primo})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è primo, \mathbf{F} altrimenti
 - ▶ “ n è maggiore di m ”: introduciamo $\mathbf{>} \in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathbf{>})(n, m) = \mathbf{T}$ se n è maggiore di m , \mathbf{F} altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x. \mathbf{pari}(x) \wedge x > \mathbf{2} \Rightarrow \neg \mathbf{primo}(x))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- ▶ **Alberto** non segue LPP ma va al cinema con **Bruno** o con **Carlo**
- ▶ Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
- ▶ Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

Alfabeto ed Interpretazione

Alberto non **segue LPP** ma **va al cinema** con **Bruno** o con **Carlo**

- ▶ Dominio: l'insieme delle persone
- ▶ **Costanti**: le persone **Alberto**, **Bruno** e **Carlo**. Introduciamo le costanti $A, B, C \in \mathcal{C}$ tali che $\alpha(A) =$ "la persona Alberto", $\alpha(B) =$ "la persona Bruno" e $\alpha(C) =$ "la persona Carlo"
- ▶ Operatori sul dominio menzionati: nessun simbolo di funzione
- ▶ Proprietà o relazioni tra persone:
 - ▶ introduciamo un simbolo di predicato $vaCinema \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(vaCinema)(d) = \mathbf{T}$ se d va al cinema, \mathbf{F} altrimenti
 - ▶ introduciamo un simbolo di predicato $segueLPP \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(segueLPP)(d) = \mathbf{T}$ se d segue LPP, \mathbf{F} altrimenti
 - ▶ introduciamo un simbolo di predicato $= \in \mathcal{P}$ con arietà 2 con il significato standard

Formalizzazione di Enunciati: Formule

- ▶ **Alberto** non **segue LPP** ma **va al cinema** con **Bruno** o con **Carlo**:

$$\neg \text{segueLPP}(A) \wedge (\text{vaCinema}(A) \wedge (\text{vaCinema}(B) \vee \text{vaCinema}(C)))$$

- ▶ **Tutti** gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x. \text{segueLPP}(x) \Rightarrow \text{vaCinema}(x))$$

- ▶ **Tutti** gli studenti di LPP **tranne uno** vanno al cinema:

$$(\exists x. \text{segueLPP}(x) \wedge \neg \text{vaCinema}(x)) \wedge \\ (\forall y. \text{segueLPP}(y) \wedge \neg (x = y) \Rightarrow \text{vaCinema}(y))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

Formalizzare l'enunciato: "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"

- ▶ **Dominio:** l'insieme delle persone
- ▶ Costanti, operatori sul dominio menzionati: nessuno
- ▶ Proprietà o relazioni tra persone:
 - ▶ "d₁ e d₂ sono parenti": introduciamo *parenti* ∈ \mathcal{P} con arietà 2 e $\alpha(\textit{parenti})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d₁ e d₂ sono parenti, **F** altrimenti
 - ▶ "d₁ è antenato di d₂": introduciamo *antenato* ∈ \mathcal{P} con arietà 2 e $\alpha(\textit{antenato})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d₁ è antenato di d₂, **F** altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x.(\forall y.(\exists z.\textit{antenato}(z, x) \wedge \textit{antenato}(z, y)) \Rightarrow \textit{parenti}(x, y)))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

“Se un numero naturale è pari allora il suo successore è dispari”

- ▶ Dominio: numeri naturali: \mathbb{N}
- ▶ Operatori sul dominio menzionati: “successore”
 - ▶ Introduciamo il simbolo **succ** $\in \mathcal{F}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{succ})(n) = n + 1$
- ▶ Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
 - ▶ “ n è pari”: introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ come prima
 - ▶ “ n è dispari”: introduciamo **dispari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{dispari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, **F** altrimenti
- ▶ Formula:

$$(\forall x. \mathbf{pari}(x) \Rightarrow \mathbf{dispari}(\mathbf{succ}(x)))$$